**Premessa**

Questa breve trattazione non vuole costituire una guida completa ed esauriente sull'argomento, ma vuole fornire solamente i concetti fondamentali necessari per il raggiungimento degli obiettivi del programma di matematica applicata della classe quarta Igea.

**Derivata di una funzione: le motivazioni**

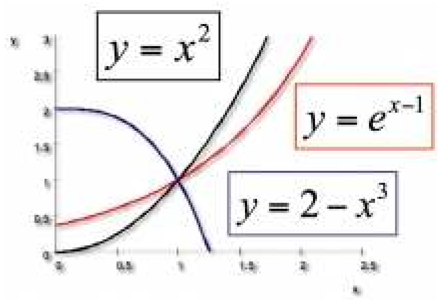
La nascita del calcolo differenziale, va ricercato nei tentativi di risolvere una serie di problemi; alcuni di essi, di natura affatto differente, quali:

- Definire la **tangente** ad una curva.
- Descrivere la **velocità istantanea** di un punto.
- Risoluzione di problemi di **minimo**.

possono essere affrontati e risolti (almeno in un consistente numero di casi) mediante l'uso dello strumento matematico della **derivata di una funzione reale**.

**Derivata di una funzione: le motivazioni**

Abbiamo già visto come il concetto di limite consente di gestire il problema della valutazione di una funzione. Non ci consente però di stimare la monotonia di una funzione (crescente o decrescente?) e di valutarne la velocità di variazione. Ad esempio per le tre funzioni riportate in figura




si ha che il limite per x tendente a 1 è uguale a 1.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

La loro monotonia è ovviamente differente.

In particolare la funzione y=2-x^3 è decrescente, le altre due sono crescenti.

Queste ultime, inoltre, sembrano mostrare una differente "velocità di crescita".

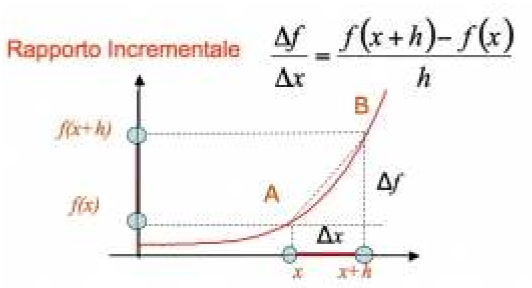
**Rapporto incrementale**

Occorre dunque un "indice di variabilità" che consenta di:

1. Stabilire la monotonia di una funzione (puntuale).
2. Quantificare la velocità di variazione (se la funzione è crescente "intorno" ai punti a e b del suo dominio, è possibile stabilire in quale punto la crescita è più veloce? Fra due funzioni, entrambe crescenti in un punto, è possibile quale delle due cresce più velocemente?).

Notiamo che per la funzione ***y=mx+n*** sappiamo rispondere alle due domande precedenti: la monotonia dipende dal coefficiente angolare **m** (se positivo, la funzione è crescente, se negativo decrescente) e, fra due rette aventi coefficiente angolare positivo, quella con coefficiente angolare maggiore ha pendenza maggiore.

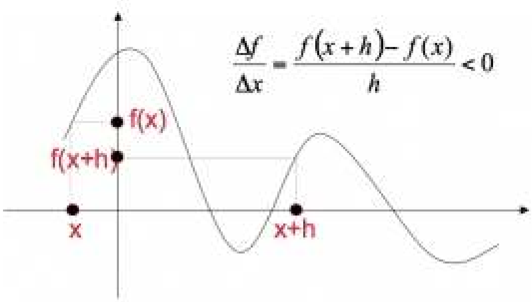
Notiamo che il rapporto incrementale coincide con il coefficiente angolare della retta per A e B (secante il grafico nei punti ***(x,f(x)), (x+h, f(x+h))*** ).




- **Rapporto incrementale negativo** -> La funzione f(x) **decresce** passando **da *x* a *x+h*.**
- **Rapporto incrementale positivo** -> La funzione f(x) **cresce** passando **da *x* a *x+h*.**

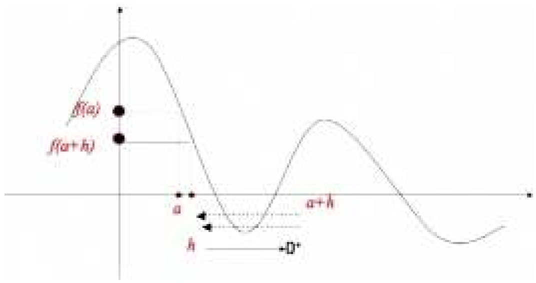
Nota: Il rapporto incrementale positivo garantisce che la funzione decresce passando da x a x+h, ma non che decresce fra *x* e *x+h* !

La funzione **decresce** passando da x a ***x+h [x,x+h]*** ma è **crescente** in x.



**Derivata**

Un'informazione puntuale in **a** circa la monotonia richiede che si consideri un "intervallo **[*a*, *a*+*h*]** molto piccolo".



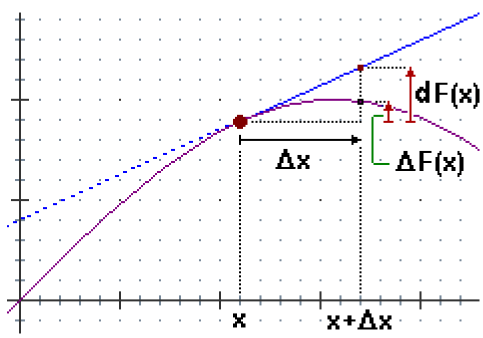

$$\boxed{D(f(a)) = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Diremo che una funzione è derivabile in un punto se esiste ed è finito in tale punto il limite del rapporto incrementale **df(x)/dx**.

Il calcolo della derivata, per ognuna delle funzioni elementari viste richiede il calcolo di un limite nella forma **0/0** che, fortunatamente, siamo in grado di risolvere.

$$\frac{df(a)}{dx} \quad \text{e} \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$$

La derivata in un punto è il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione in tale punto.



- ***y = f(x)* derivabile in a**
- ***y = f(a) + f'(a)(x-a)* eq. della retta tangente a G(f) in *(a, f(a))***

Una funzione derivabile in un intervallo, è una funzione il cui grafico è dotato di retta tangente in ogni suo punto (sul calcolo della retta tangente torneremo anche più avanti).

**Calcolo delle derivate**

Il calcolo delle derivate, si basa su:

- Regole di derivazione delle funzioni elementari.
- Operazioni con le derivate.
- Derivazione delle funzioni composte.

Non sarà dunque necessario calcolare il limite della funzione rapporto incrementale. Qualche volta occorrerà **valutare il limite della funzione derivata in alcuni punti di particolare interesse**.

Il calcolo della derivata di una funzione consente di risolvere i seguenti importanti problemi:

1. Studiare la monotonia.
2. Calcolare l'equazione della retta tangente in un punto del grafico della funzione.
3. Fornire la "miglior approssimazione lineare" di una funzione intorno ad un punto.
4. Sciogliere alcune forme indeterminate rapporto.

Osserviamo che i problemi 2. e 3. sono in realtà lo stesso problema, visto dai punti di vista geometrico e analitico rispettivamente. Una buona padronanza nel calcolo delle derivate appare, dunque, di fondamentale importanza.

**Derivate delle funzioni elementari**

Utilizzare la definizione per calcolare la derivata prima di una funzione, è un procedimento poco pratico ed assai laborioso. E' pertanto necessario disporre di regole e di teoremi che discendono dalla definizione, mediante i quali è possibile calcolare la derivata di una qualsiasi funzione.

***Funzione costante***

| | |
|---|---|
| $y = k$ | $y' = 0$ |

**Esempi**

| | |
|---|---|
| $y = 5$ | $y' = 0$ |
| $y = \log 3$ | $y' = 0$ |
| $y = e^4$ | $y' = 0$ |

*Funzione potenza*

| | |
|---|---|
| $y = x^n$ | $y' = nx^{n-1}$ |

**Esempi**

| | |
|---|---|
| $y = x$ | $y' = 1$ |
| $y = x^2$ | $y' = 2x$ |
| $y = x^3$ | $y' = 3x^2$ |
| $y = x^4$ | $y' = 4x^3$ |
| $y = x^{-1}$ | $y' = -1x^{-2}$ |
| $y = x^{-2}$ | $y' = -2x^{-3}$ |
| $y = \sqrt{x}$ | $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $y = \sqrt[n]{x}$ | $y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ |

*Funzioni logaritmica ed esponenziale*

| | |
|---|---|
| $y = \log_a x$ | $y' = \frac{1}{x \ln a}$ |
| $y = \ln x$ | $y' = \frac{1}{x}$ |
| $y = a^x$ | $y' = a^x \ln a$ |
| $y = e^x$ | $y' = e^x$ |

**Regole di derivazione**

Il calcolo delle derivate si sviluppa a partire delle seguenti regole di derivazione

**Derivata di una somma di funzioni:**

La derivata della somma di due o più funzioni è uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni

$$D\left(k \cdot f(x) + h \cdot g(x)\right) = k \cdot f'(x) + h \cdot g'(x)$$

**Derivata di un prodotto:**

La derivata del prodotto di due funzioni è uguale alla somma tra il prodotto della derivata della prima funzione per la seconda non derivata ed il prodotto della prima funzione per la derivata della seconda.

$$D\left(f(x)\cdot g(x)\right)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

**Derivata di un quoziente:**

La derivata di un quoziente tra due funzioni è uguale al rapporto tra

La differenza tra il prodotto della derivata della prima funzione per la seconda non derivata ed il prodotto della prima funzione per la derivata della seconda ed il denominatore al quadrato.

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

**Derivata di una funzione composta (funzione di funzione)**

La derivata di una funzione composta è data dal prodotto tra la derivata della funzione esterna calcolata in quella interna per la derivata della funzione interna.

$$D\left(g\left(f(x)\right)\right)=g'\left(f(x)\right)\cdot f'(x)$$

in particolare:

| | |
|---|---|
| $y=\ln\lvert x\rvert$ | $y'=\frac{1}{x}$ |
| $y=[f(x)]^n$ | $y'=n\cdot[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$ |
| $y=a^{f(x)}$ | $y'=a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot f'(x)$ |
| $y=e^{f(x)}$ | $y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$ |
| $y=\ln\lvert f(x)\rvert$ | $y'=\frac{f'(x)}{f(x)}$ |

**Derivata di una funzione composta esponenziale**

$$D[f(x)]^{g(x)}=[f(x)]^{g(x)}\cdot\left[g'(x)\cdot\ln f(x)+\frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right]$$

**Esempi di calcolo di derivate.**

**Derivata della potenza n.ma o di un monomio**

$D\left(a_0x^n\right)=\left(a_0x^n\right)'=na_0x^{n-1}$ *derivata di un monomio*

Abbiamo che:

$$D\left(3x^2\right) = 2\cdot 3\cdot x^{2-1} = 6x$$

$$D\left(5x^4\right) = 4\cdot 5\cdot x^{4-1} = 20x^3$$

$$D\left(-4x^3\right) = 3\cdot(-4)\cdot x^{3-1} = -12x^2$$

$$D\left(7x\right) = 1\cdot 7\cdot x^{1-1} = 7x^0 = 7\cdot 1 = 7\,,\ D\left(10x\right) = 10,\ D\left(3x\right) = 3$$

**Derivata di una costante**

$$D\left(c\right) = 0$$

$$D\left(4\right) = 0,\ D\left(10\right) = 0,\ D\left(25\right) = 0$$

Ricordando le regole delle potenze:

$a)\ a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$b)\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$c)\ a^{-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$

seguono varie proprietà applicate nei seguenti

***ESEMPI***

$D\left(x^3\right) = 3x^{3-1} = 3x^2,\ D\left(x^5\right) = 5x^{5-1} = 5x^4,\ D\left(x^8\right) = 8x^{8-1} = 8x^7,\ D\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1},$

$D\left(x^{1+\sqrt[3]{2}}\right) = \left(1+\sqrt[3]{2}\right)x^{\sqrt[3]{2}}$

**Derivata della radice n.ma**

$$D\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$ *derivata della radice n-esima*

***ESEMPI***

$D\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x^{2-1}}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ D\left(\sqrt[3]{x}\right) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^{3-1}}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ D\left(\sqrt[5]{x}\right) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^{5-1}}} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

$$D\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{\left[f(x)\right]^{n-1}}}$$ *derivata della radicen-esima di una funzione*

$$D\left(\sqrt{x^3-4x+2}\right) = \frac{\left(x^3-4x+2\right)'}{2\sqrt{\left(x^3-4x+2\right)^{2-1}}} = \frac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-4x+2}}$$

$$D\left(\sqrt[3]{4x^3+6x^2-5}\right) = \frac{\left(4x^3+6x^2-5\right)'}{3\sqrt[3]{\left(4x^3+6x^2-5\right)^{3-1}}} = \frac{12x^2+12x}{3\sqrt[3]{\left(4x^3+6x^2-5\right)^2}} = \frac{4x^2+4x}{\sqrt[3]{\left(4x^3+6x^2-5\right)^2}}$$

$$D\left(\sqrt[5]{5x+3}\right) = \frac{\left(5x+3\right)'}{5\sqrt[5]{\left(5x+3\right)^{5-1}}} = \frac{5}{5\sqrt[5]{\left(5x+3\right)^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\left(5x+3\right)^4}}$$

**Addizione algebrica di due funzioni**

$$D\left[a\,f(x) \pm b\,g(x)\right] = a\,D f(x) \pm b\,D g(x)$$ *derivata della somma ( o differenza ) e linearità*

$$D\left(5x^4+3x^2+7x+6\right) = 5D\left(x^4\right)+3D\left(x^2\right)+7D\left(x\right)+6D\left(1\right) = 20x^3+6x+7$$

$$D\left(6x^3-2x^2+4x-6\right) = 6D\left(x^3\right)-2D\left(x^2\right)+4D\left(x\right)-6D\left(1\right) = 18x^2-4x+4$$

$$D\left(-4x^3+7x\right) = -4D\left(x^3\right)+7D\left(x\right) = -12x^2+7$$

**Prodotto tra due o più funzioni**

$$D\left[f(x)g(x)\right] = \left[f(x)g(x)\right]' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$ *derivata del prodotto*

***ESEMPI***

$$D\left[\left(x^2-1\right)\left(5x+2\right)\right] = \left(x^2-1\right)^{|}\left(5x+2\right)+\left(x^2-1\right)\left(5x+2\right)^{|} = 2x\left(5x+2\right)+\left(x^2-1\right)5 =$$

$$= 10x^2+4x+5x^2-5 = 15x^2+4x-5$$

$$D\left[\left(2x+3\right)\left(x^2+2x\right)\right] = \left(2x+3\right)^{|}\left(x^2+2x\right)+\left(2x+3\right)\left(x^2+2x\right)^{|} = 2\left(x^2+2x\right)+\left(2x+3\right)\left(2x+2\right) =$$

$$= 2x^2+4x+4x^2+4x+6x+6 = 6x^2+14x+6$$

$$D\left[\left(3x^3+4x+1\right)\left(3x^2+4\right)\right] = \left(3x^3+4x+1\right)^{|}\left(3x^2+4\right)+\left(3x^3+4x+1\right)\left(3x^2+4\right)^{|} =$$

$$= \left(9x^2+4\right)\left(3x^2+4\right)+\left(3x^3+4x+1\right)6x = 27x^4+36x^2+12x^2+16+18x^4+24x^2+6x =$$

$$= 45x^4+72x^2+6x+16$$

Derivata del quoziente

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{|} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}, \quad g(x) \neq 0 \qquad \textit{derivata del quoziente}$$

***ESEMPI***

$$D\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{(x)^{|}\left(x^2+1\right)-x\left(x^2+1\right)^{|}}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$D\left(\frac{x^3}{4-x}\right) = \frac{\left(x^3\right)^{|}(4-x)-x^3(4-x)^{|}}{(4-x)^2} = \frac{3x^2(4-x)-x^3(-1)}{(4-x)^2} = \frac{-2x^3+12x^2}{(4-x)^2}$$

$$D\left(\frac{1+x^2}{4+x^2}\right) = \frac{\left(1+x^2\right)^{|}\left(4+x^2\right)-\left(1+x^2\right)\left(4+x^2\right)^{|}}{\left(4+x^2\right)^2} = \frac{2x\left(4+x^2\right)-\left(1+x^2\right)2x}{\left(4+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{6x}{\left(4+x^2\right)^2}$$

**(11)** $D\,f\left[g(x)\right] = f'\,[.....]\,g'\,[.....] = f'\left[g(x)\right]g'(x)$ *derivata di funzioni composte*

***ESEMPI***

$$D\left(\sqrt{4x^2-3}\right) = \left[\left(4x^2-3\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{4x^2-3}}\left(4x^2-3\right)' = \frac{8x}{2\sqrt{4x^2-3}} = \frac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}$$

$$D\left[\sqrt[5]{\left(2x^3+1\right)^2}\right] = \left[\sqrt[5]{\left(2x^3+1\right)^2}\right]' = \left[\left(2x^3+1\right)^{\frac{2}{5}}\right]' = \frac{2}{5}\left(2x^3+1\right)^{-\frac{3}{5}}\left[\left(2x^3+1\right)\right]' =$$

$$= \frac{2}{5\sqrt[5]{\left(2x^3+1\right)^3}}\,6x^2 = \frac{12x^2}{5\sqrt[5]{\left(2x^3+1\right)^3}}$$

$$D\left(\sqrt[3]{x^2-7x}\right) = \left[\left(x^2-7x\right)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\left(x^2-7x\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(x^2-7x\right)' = \frac{2x-7}{3\sqrt[3]{\left(x^2-7x\right)^2}}$$

$$D\left[\left(3x^2-x\right)^5\right] = 5\left(3x^2-x\right)^{5-1}\left(3x^2-x\right)' = 5\left(3x^2-x\right)^4\left(6x-1\right)$$

**(12)** $D\left[e^{f(x)}\right] = e^{f(x)}f'(x)$ *derivata di funzioni esponenziali*

***ESEMPI***

$$D\left(e^{x^2+5x+2}\right) = e^{x^2+5x+2}\left(x^2+5x+2\right)' = e^{x^2+5x+2}\left(2x+5\right)$$

$$D\left(e^{3x^3+7x}\right) = e^{3x^3+7x}\left(3x^3+7x\right)' = e^{3x^3+7x}\left(9x^2+7\right)$$

**(13)** $D\left[\ln f(x)\right] = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ *derivata di funzioni logaritmiche*

***ESEMPI***

$$D\left[\ln\left(3x^2+2\right)\right] = \frac{1}{3x^2+2}\left(3x^2+2\right)' = \frac{6x}{3x^2+2}$$

$$D\left[\ln\left(x^3-2x-1\right)\right] = \frac{1}{x^3-2x-1}\left(x^3-2x-1\right)' = \frac{3x^2-2}{x^3-2x-1}$$

***ESERCIZI PROPOSTI***

*Calcolare le derivate delle seguenti funzioni polinomiali:*

$y = 3x^2 + 1$ $[6x]$

$y = 5x + 7$ $[5]$

$y = 2x - 5$ $[2]$

$y = 3x^2 - 6x + 4$ $[6x - 6]$

$y = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ $[12x^2 - 4x + 5]$

$y = 4x^2 - 1$ $[8x]$

$y = 1 + x + x^2$ $[1 + 2x]$

$y = x^3 - 2x$ $[3x^2 - 2]$

$y = 3x - 1$ $[3]$

$y = 4x^2$ $[8x]$

$y = 4x^2 + 5$ $[8x]$

$y = x^5 + 4x^2$ $[5x^4 + 8x]$

$y = x^3 + 2x^2 + 1$ $[3x^2 + 4x]$

$y = 3x^4 - 5x^3 + 4x - 7$ $[12x^3 - 15x^2 + 4]$

$y = 8x^5 - 24x^3 + 7$ $[40x^4 - 72x^2]$

$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 5x + 9$ $[x + x^2 + 5]$

$y = (2x + 3)(x^2 + 3x - 1)$ $[6x^2 + 18x + 7]$

$y = (x^2 - 1)(5x + 2)$ $[15x^2 + 4x - 5]$

$y = (x^2 + 1)^5$ $[10x(x^2 + 1)^4]$

$y = \frac{5x^3}{4} - \frac{7x^2}{2} - \frac{3x}{5} + 9$ $\left[\frac{15}{4}x^2 - 7x - \frac{3}{5}\right]$

$y = x(x - 1)^3$ $[-(2x + 1)(x - 1)^2]$

$y = (1 + x^2)(2x - 5)$ $[6x^2 - 10x + 2]$

$y = (2x - 1)^2(3 - 7x)^5$ $[(2x - 1)(3 - 7x)^4(-98x + 47)]$

$y = (2x + 3)(x^2 + 3x - 1)$ $[6x^2 + 18x + 7]$

$y = (1 - 2x^2)(3x + 1)$ $[-18x^2 - 4x + 3]$

$y = (3 - 2x - x^2)(x^4 - 2x^2)$ $[2x(-3x^4 - 5x^3 + 10x^2 + 6x - 6)]$

$y = x^2(4 + x)(5x + 1)$ $[x(20x^2 + 63x + 8)]$

$y = (8x - 1)^{10}$ $[80(8x - 1)^9]$

$y = (x - 1)^2(x - 2)$ $[(x - 1)(3x - 5)]$

$y = (5 + x^3)(1 - 2x - 4x^3)^2$ $[(1 - 2x - 4x^3)(-36x^5 - 10x^3 - 117x^2 - 20)]$

$y = (1 - 3x)^4(1 + x)$ $[(11 + 15x)(3x - 1)^3]$

$y = (2 - x)^2(x^3 + 2x)$ $[(2 - x)(-5x^3 + 6x^2 - 6x + 4)]$

$y = (x - 2)^3(x + 1)^2$ $[(x + 1)(x - 2)^2(5x - 1)]$

$y = (x^2 + x + 1)^3(x - 1)^4$ $[(x^2 + x + 1)^2(x - 1)^3(10x^2 + x + 1)]$

$y = (x^6 + 1)(3x + 1)^8$ $[6(3x + 1)^7(7x^6 + x^5 + 4)]$

$y = (x^2 + 2x - 3)^3(4 - x^2)^7$ $[2(12 + 33x - 17x^2 - 10x^3)(x^2 + 2x - 3)^2(4 - x^2)^6]$

$y = 2(x + 2)^2(x^2 + 4x - 3)$ $[4(x + 2)(2x^2 + 8x + 1)]$

$y = x^2(x^4 + 1)^3 + 3x(x^2 + 1)]$ $[2x(x^4 + 1)^2(7x^4 + 1) + 3(3x^2 + 1)]$

*Calcolare le derivate delle seguenti funzioni razionali fratte:*

$y = \frac{5}{x+1}$ $\left[-\frac{5}{(x+1)^2}\right]$

$y = \frac{x+1}{2x}$ $\left[-\frac{1}{2x^2}\right]$

$y = \frac{x-3}{x-4}$ $\left[-\frac{1}{(x-4)^2}\right]$

$y = \frac{2x-3}{3x-4}$ $\left[\frac{1}{(3x-4)^2}\right]$

$y = \frac{x+1}{x-3}$ $\left[-\frac{4}{(x-3)^2}\right]$

$y = \frac{3x-4}{x^2-1}$ $\left[\frac{x(5-3x)}{(x^2-1)^2}\right]$

$y=\frac{1}{x^2-1}$ $\left[-\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}\right]$

$y=\frac{4x^2+1}{x}$ $\left[\frac{(2x+1)(2x-1)}{x^2}\right]$

$y=\frac{x^2-3x-1}{x+1}$ $\left[\frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}\right]$

$y=\frac{(1-x)^2}{x}$ $\left[\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right]$

$y=\frac{3x^2-5}{x^2-1}$ $\left[\frac{4x}{\left(x^2-1\right)^2}\right]$

$y=\frac{4x^2-5x+3}{x^2-6x+5}$ $\left[-\frac{19x^2-34x+7}{\left(x^2-6x+5\right)^2}\right]$

$y=\frac{3x^2-2x+3}{x^2-2x-1}$ $\left[-\frac{4\left(x^2+3x-2\right)}{\left(x^2-2x-1\right)^2}\right]$

$y=\frac{1}{x}$ $\left[-\frac{1}{x^2}\right]$

$y=\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{x}+x^3$ $\left[\frac{3x^5+3x-1}{x^3}\right]$

$y=3x^2+9x+\frac{1}{x}$ $\left[\frac{6x^3+9x^2-1}{x^2}\right]$

$y=\frac{x^2+x^6-3x^3}{x^4}$ $\left[-\frac{2}{x^3}+2x+\frac{3}{x^2}\right]$

$y=x^3-2x-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^3}$ $\left[3x^2-2+\frac{5}{x^2}-\frac{6}{x^4}\right]$

$y=\frac{2x}{3-x}$ $\left[\frac{6}{(3-x)^2}\right]$

$y=\frac{1+x^2}{4+x^2}$ $\left[\frac{6x}{\left(4+x^2\right)^2}\right]$

$y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ $\left[\dfrac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}\right]$

$y=\dfrac{x^3}{4-x}$ $\left[\dfrac{2x^2(6-x)}{(4-x)^2}\right]$

$y=\dfrac{x^2+1}{5x-7}$ $\left[\dfrac{5x^2-14x-5}{(5x-7)^2}\right]$

$y=\dfrac{8x+x^5}{x+1}$ $\left[\dfrac{4x^5+5x^4+8}{(x+1)^2}\right]$

$y=\dfrac{4x^2-5}{x+1}$ $\left[\dfrac{4x^2+8x+5}{(x+1)^2}\right]$

$y=2x-\dfrac{x}{x^2+1}$ $\left[\dfrac{2x^4+5x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}\right]$

$y=\left(2x+\dfrac{5}{x}\right)^3$ $\left[3\left(2x+\dfrac{5}{x}\right)^2\left(2-\dfrac{5}{x^2}\right)\right]$

$y=\left(x-1-\dfrac{3}{x}\right)^4$ $\left[4\left(x-1-\dfrac{3}{x}\right)^3\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)\right]$

$y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ $\left[\dfrac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}\right]$

$y=\dfrac{x^2+x+2}{x^2-1}$ $\left[\dfrac{-x^2-6x-1}{\left(x^2-1\right)^2}\right]$

$y=\dfrac{7}{\left(x^3+8\right)^2}$ $\left[-\dfrac{42x^2}{\left(x^3+8\right)^3}\right]$

$y=\dfrac{x}{x^3+x^2+2}$ $\left[\dfrac{-2x^3-x^2+2}{\left(x^3+x^2+2\right)^2}\right]$

*Calcolare le derivate delle seguenti funzioni irrazionali:*

$y=\sqrt{x}$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$

$y=\sqrt[3]{x^2-7x}$ $\left[\frac{2x-7}{\sqrt[3]{\left(x^2-7x\right)^2}}\right]$

$y=\sqrt{x^2+2}$ $\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right]$

$y=\sqrt{4x^2-3}$ $\left[\frac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}\right]$

$y=\sqrt{x^3-4x+2}$ $\left[\frac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-4x+2}}\right]$

$y=\sqrt{x^4+x^2-2x}$ $\left[\frac{2x^3+x-1}{\sqrt{x^4+x^2-2x}}\right]$

$y=(x-1)\sqrt{x^2+1}$ $\left[\dfrac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right]$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right]$

$y=\sqrt[5]{5x+3}$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt[5]{(5x+3)^4}}\right]$

$y=\sqrt[3]{4x^3+6x^2-5}$ $\left[\dfrac{4x(x+1)}{\sqrt[3]{(4x^3+6x^2-5)^2}}\right]$

$y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$ $\left[\dfrac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2}\right]$

$y=\sqrt[5]{(2x^3+1)^2}$ $\left[\dfrac{12x^2}{5\sqrt[5]{(2x^3+1)^3}}\right]$

$y=8x+\sqrt{x}$ $\left[8+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right]$

$y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x-1}$ $\left[\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right]$

$y=2\sqrt{x}+2x+1$ $\left[\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2\right]$

$y=\left(x^2+2\sqrt{x}\right)^5$ $\left[5\left(x^2+2\sqrt{x}\right)^4\left(2x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$

$y=2\sqrt{x^3}-\dfrac{7}{\sqrt[7]{x}}+4\sqrt[4]{x^3}$ $\left[3\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^8}}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}}\right]$

$y=\sqrt[4]{x}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ $\left[\dfrac{\sqrt{x}+1}{4x\sqrt[4]{x}}\right]$

$y=x^7-3\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ $\left[7x^6-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}\right]$

## *Calcolare le derivate delle seguenti funzioni esponenziali e logaritmiche:*

| | |
|---|---|
| $y = e^{x+1}$ | $[e^{x+1}]$ |
| $y = xe^x$ | $[(1+x)e^x]$ |
| $y = e^{5-x^2}$ | $\left[-2xe^{5-x^2}\right]$ |
| $y = \dfrac{x^4+1}{e^4+1}$ | $\left[\dfrac{4x^3}{e^4+1}\right]$ |
| $y = xlnx$ | $[lnx + 1]$ |
| $y = x^2lnx + 3x$ | $[2xlnx + x + 3]$ |
| $y = e^{-\frac{3}{x^2}}$ | $\left[\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{3}{x^2}}\right]$ |
| $y = e^{\sqrt{x}}$ | $\left[\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\right]$ |
| $y = \dfrac{lnx-1}{lnx+1}$ | $\left[\dfrac{2}{x(lnx+1)^2}\right]$ |
| $y = x^3e^x + e^x - 1$ | $[e^x(x^3 + 3x^2 + 1)]$ |
| $y = e^x(2 - e^x)$ | $[2e^x(1 - e^x)]$ |
| $y = e^x(x^3 - x + 7)$ | $[e^x(x^3 + 3x^2 - x + 6)]$ |
| $y = xln^3x - 3xln^2x + 6xlnx - 6x$ | $[ln^3x]$ |
| $y = x^2(lnx)^3$ | $[x(lnx)^2(2lnx + 3)]$ |
| $y = 5xln^2x - 6x^3ln^5x$ | $[-18x^2ln^5x - 30x^2ln^4x + 5ln^2x + 10lnx]$ |
| $y = \dfrac{1}{x}\cdot lnx$ | $\left[\dfrac{1}{x^2}(1-lnx)\right]$ |
| $y = (xlnx - 1)^2$ | $[2(xlnx - 1)(lnx + 1)]$ |
| $y = 3xlnx$ | $[3(lnx + 1)]$ |
| $y = x^2lnx$ | $[x(2lnx + 1)]$ |
| $y = xln^3x$ | $[ln^2x(lnx + 3)]$ |
| $y = \dfrac{1}{2}ln^2x - lnx + \sqrt{x}$ | $\left[\dfrac{2lnx - 2 + \sqrt{x}}{2x}\right]$ |
| $y = ln\left(x + \sqrt{4+x^2}\right)$ | $\left[\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2}}\right]$ |