Appunti sulle disequazioni

Premessa

Questa breve trattazione non vuole costituire una guida completa ed esauriente sull'argomento, ma vuole fornire solamente i concetti fondamentali necessari per il raggiungimento degli obiettivi del programma di matematica applicata della classe quarta Igea.

Definizione

Una disequazione e' una diseguaglianza che e' verificata per alcuni intervalli di valori
Ad esempio la disequazione
$x - 4 \geq 0$ e' verificata per tutti i valori della x maggiori di 4, cioè se al posto della x metto 5, 6, oppure 4,2 e' vero che il primo termine della disuguaglianza e' maggiore o uguale al secondo

---

Risolvere una disequazione significa trovare gli intervalli dei valori che sostituiti alla x rendono la diseguaglianza vera

---

In una disequazione possiamo trovare solo i valori maggiori $>$ oppure minori $<$ di qualcosa oppure possiamo trovare i valori maggiori e uguali $\geq$ oppure minori e uguali $\leq$.
Occorre fare molta attenzione e considerare sempre se devo o no prendere il valore corrispondente all'uguale

Disequazione algebriche di primo grado ad una incognita

Una disequazione si dice di primo grado quando la x vi compare con potenza 1
Ad esempio:
$x - 4 \geq 3x + 2$
e' una disequazione di primo grado
Per risolvere la disequazione si applicano gli stessi principi di equivalenza per le equazioni di primo grado con una grossissima differenza per quanto riguarda il secondo principio

Se si moltiplica o si divide per un numero negativo bisogna cambiare di verso la disequazione

Si portano tutti i termini con l'incognita x ad un membro e gli altri nell'altro membro;
$x - 3x \geq 2 + 4$
calcolo
$-2x \geq 6$
Divido entrambi i membri per -2 e contemporaneamente cambio il verso della disequazione

$$\frac{-2x}{-2} \le \frac{6}{-2}$$

Semplifico

$x \le -3$

Quindi la soluzione e' l'insieme delle x minori od uguali a -3

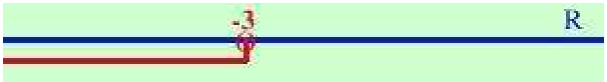
Si puo' indicare anche nei seguenti modi:

$\{x \in R \ / \ x \le -3\}$

oppure

$(-\infty, -3]$

od anche



Disequazioni di secondo grado

Una disequazione di secondo grado si presenta nella seguente forma.

$ax^2 + bx + c \ge 0$

oppure

$ax^2 + bx + c \le 0$

Vi sono due metodi per giungere alla soluzione, uno più razionale e l'altro più intuitivo. Essi sono :

- Metodo algebrico
- Metodo della parabola

Determinazione del segno di un polinomio di secondo grado . Metodo algebrico

Risolvere una disequazione di secondo grado significa trovare il segno del polinomio di secondo grado.

Considero il polinomio di secondo grado

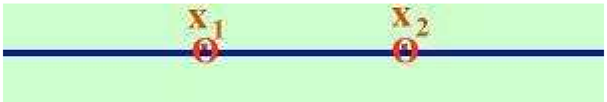
$ax^2 + bx + c$

Per determinarne il segno consideriamo sempre il caso in cui $a > 0$ (se fosse **a** minore di zero basterebbe moltiplicare tutto per -1 e in tal caso ricorda di cambiare il verso alla disequazione)

Distinguiamo i tre casi

- Discriminante del polinomio maggiore di zero
- Discriminante del polinomio uguale a zero
- Discriminante del polinomio minore di zero

Discriminante del polinomio maggiore di zero
Voglio trovare il segno del polinomio di secondo grado
$ax^2 + bx + c$
Considero l'equazione associata
$ax^2 + bx + c = 0$
Se il discriminante dell'equazione e' maggiore di zero allora ho due soluzioni
x_1 e x_2 reali e distinte
e in questo caso posso utilizzare la decomposizione del trinomio
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Quindi basterà trovare il segno di
$a(x - x_1)(x - x_2)$
Anzi, siccome a e' maggiore di zero possiamo limitarci a
$(x - x_1)(x - x_2)$
Dobbiamo trovare il segno di quest'espressione quando ad x assegniamo un valore sulla retta reale



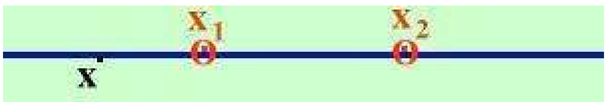
Ho cerchiato i valori perche' in quei punti l'espressione vale zero

Vi sono tre possibilità, la x si può trovare (partendo da sinistra):

- Prima di x_1
- tra x_1 ed x_2
- Dopo x_2

dobbiamo studiare tutti e tre i casi

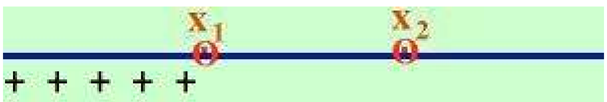
- la x si trova prima di x_1



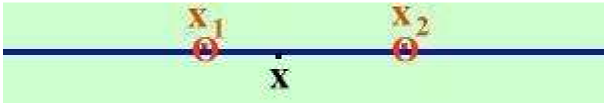
in questo caso il fattore $(x - x_1)$ e' negativo

ma anche il fattore $(x - x_2)$ e' negativo

quindi l'espressione $(x - x_1)(x - x_2)$ essendo il prodotto di due fattori negativi e' positiva



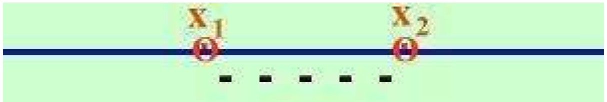
- la x si trova tra x_1 ed x_2



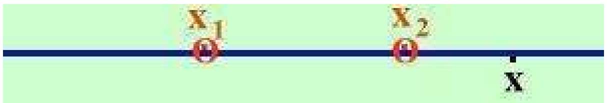
in questo caso il fattore $(x - x_1)$ e' positivo

mentre il fattore $(x - x_2)$ e' negativo

quindi l'espressione $(x - x_1)(x - x_2)$



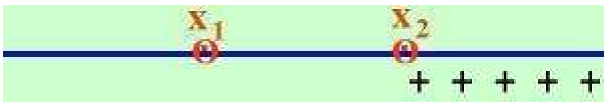
- La x si trova dopo x_2



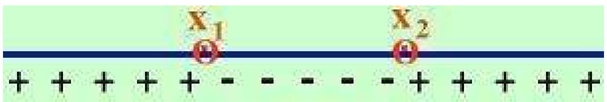
in questo caso il fattore $(x - x_1)$ e' positivo

ma anche il fattore $(x - x_2)$ e' positivo

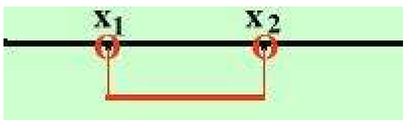
quindi l'espressione $(x - x_1)(x - x_2)$



Raccogliendo i risultati avremo:



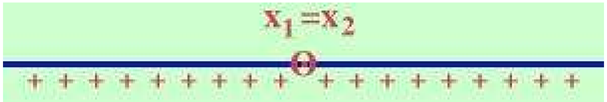
Cioè se il discriminante e' maggiore di zero il trinomio e' positivo per valori esterni all'intervallo delle radici ed e' negativo per valori interni

	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta >$ $a > 0$	 valori esterni all'intervallo delle radici	 valori interni all'intervallo delle radici

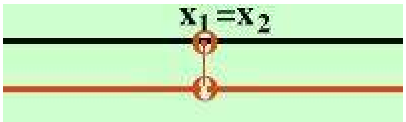
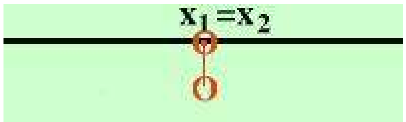
Discriminante del polinomio uguale a zero

Se il discriminante dell'equazione e' uguale a zero allora ho due soluzioni
$x_1 = x_2$ reali e coincidenti
e in questo caso la decomposizione del trinomio diventerà
$ax^2 + bx + c = a (x - x_1)(x - x_1) = a (x - x_1)^2$
e il segno di un quadrato e' sempre positivo

Quindi avremo:



Se il delta e' uguale a zero il trinomio e' positivo per tutti i valori eccetto il valore per cui si annulla
Quando il delta vale zero le soluzioni dell'equazione di secondo grado valgono -b/2a

$\Delta = 0$ $a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
	 tutti i valori eccetto -b/2a per cui si annulla	 nessun valore

Discriminante del polinomio minore di zero
Se il discriminante dell'equazione e' minore di zero allora non ho nessuna soluzione quindi non posso fare riferimento ad x_1 ed x_2
Allora per vedere il segno del trinomio
$ax^2 + bx + c$
devo riferirmi a qualcos'altro: in matematica io so che un quadrato ha sempre il segno positivo, quindi cerco di isolare parte del trinomio facendola diventare un quadrato: come prima cosa metto in evidenza a fra i vari termini
$ax^2 + bx + c =$
Ma se a non c'e' in tutti i termini come si fa a metterla in evidenza? Per metterla in evidenza basta prima farla comparire moltiplicando i termini senza a per a/a (e' come moltiplicarli per 1)

$$= ax^2 + \frac{abx}{a} + \frac{ac}{a} =$$

ora posso mettere in evidenza la a raccogliendo quella al numeratore

$$= a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}) =$$

ora il primo termine entro parentesi e' quadrato, posso considerare il secondo come doppio prodotto.
il termine da aggiungere (e togliere) perchè venga un quadrato e'

$$\frac{b^2}{4a^2}$$

eseguo

$$= a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) =$$

Scrivo i primi tre termini come quadrato e negli ultimi due faccio il minimo comune multiplo

$$= a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$$

e questa e' un'espressione di cui conosciamo il segno, infatti:

- il quadrato e' positivo
- il termine sopra il segno di frazione $b^2 - 4ac$ corrisponde al Delta ed e' negativo, quindi con il meno davanti diventa positivo
- il termine al denominatore $4a^2$ e' positivo perche' e' quadrato

tutta l'espressione e' positiva
quindi posso dire:
Se il delta e' minore di zero il trinomio e' sempre positivo per tutti i valori della x

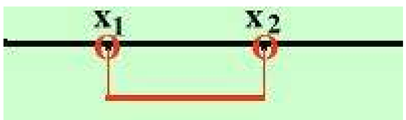
$\Delta < 0$ $a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
	sempre verificato per ogni valore di x	mai verificato

Tabella di riepilogo con a maggiore di zero

Per risolvere una disequazione di secondo grado devi considerare l'equazione associata ed applicare la formula risolutiva: devi poi controllare il termine entro radice se e'

- positivo (ed allora risolvendo trovi due valori)
- nullo (ed allora trovi due valori coincidenti)
- negativo(ed allora non puoi risolvere)

Poi segui lo schema

$a > 0$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta > 0$		

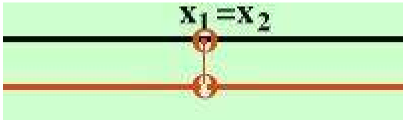
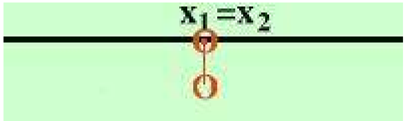
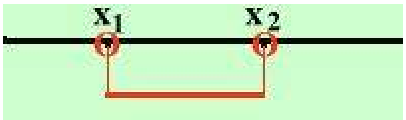
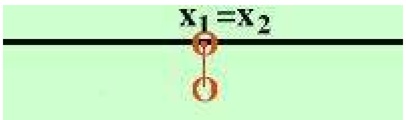
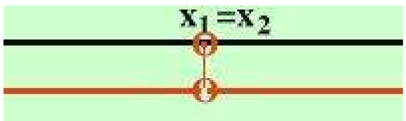
	valori esterni all'intervallo delle radici	valori interni all'intervallo delle radici
$\Delta=0$	 tutti i valori eccetto -b/2a per cui si annulla	 nessun valore
$\Delta<0$	sempre verificato per ogni valore di x	mai verificato

Tabella di riepilogo con a minore di zero

a <0	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$\Delta>0$	 valori interni all'intervallo delle radici	 valori esterni all'intervallo delle radici
$\Delta=0$	 nessun valore	 tutti i valori eccetto -b/2a per cui si annulla
$\Delta<0$	mai verificato	sempre verificato per ogni valore di x

Sistema di disequazioni di secondo grado

Un sistema di disequazioni è un insieme di disequazioni che devono essere risolte contemporaneamente.
Per risolvere un sistema di disequazioni si deve semplicemente risolvere ogni disequazione e porre i risultati su un grafico: le soluzioni del sistema sono i valori validi contemporaneamente per tutte le disequazioni, ovvero l'intersezione tra tutte le soluzioni.
Vediamo come procedere su un semplice esempio

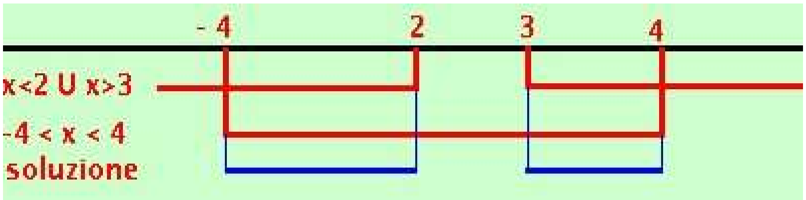
Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

la prima $x^2 - 5x + 6 > 0$ e' verificata per $x < 2 \cup x > 3$
la seconda $x^2 - 16 < 0$ e' verificata per $-4 < x < 4$
quindi il mio sistema e' equivalente al sistema

$$\begin{cases} x < 2 \cup x > 3 \\ -4 < x < 0 \end{cases}$$

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni



Devo prendere i valori che risolvono contemporaneamente entrambe le disequazioni ed ottengo come risultato
$-4 < x < 2 \quad \cup \quad 3 < x < 4$

Sistema con disequazioni di primo e secondo grado

Vediamo anche qui un semplice esempio

Risolvere il sistema

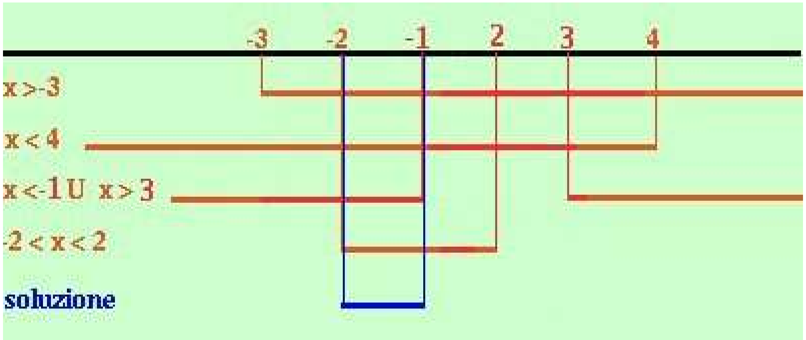
$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ x - 4 < 0 \\ \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

- la prima $x + 3 > 0$ e' verificata per $x > -3$
- la seconda $x - 4 < 0$ e' verificata per $x < 4$
- la terza $x^2 - 2x - 3 > 0$ e' verificata per $x < -1 \cup x > 3$
- la quarta $x^2 - 4 < 0$ e' verificata per $-2 < x < 2$

quindi il mio sistema e' equivalente al sistema

$$\begin{cases} x > -3 \\ x < 4 \\ x < -1 \cup x > 3 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni
Devo prendere i valori che risolvono contemporaneamente tutte e quattro le disequazioni ed ottengo come risultato
$-2 < x < -1$



Applicazioni a disequazioni prodotto di espressioni di primo e secondo grado

Quando invece di un sistema si ha un prodotto si deve pensare che ogni prodotto e' equivalente a più sistemi

Ad esempio se si ha
$(x-2)(x^2 - 6x + 5) > 0$
siccome si deve trovare dove il prodotto e' maggiore di zero si potranno considerare le soluzioni che vanno bene per i due sistemi

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$$

Infatti se i due fattori dell'espressione sono entrambe positivi oppure entrambe negativi allora l'espressione prodotto e' positiva
Se invece hai:
$(x-2)(x^2 - 6x + 5) < 0$
siccome devi trovare dove il prodotto e' minore di zero potrai considerare le soluzioni che vanno bene per i due sistemi

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$$

Senza dover risolvere più sistemi , però, e' più' semplice porre tutte le espressioni componenti maggiori di zero (sia che l'espressione sia maggiore che minore di zero) e poi controllare dove il prodotto di queste espressioni risulta positivo oppure negativo. (Ciò equivale a risolvere contemporaneamente tutti i sistemi)

Vediamo come esempio la soluzione delle due disequazioni considerate sopra

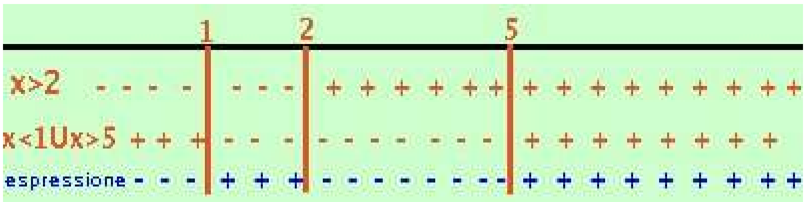
1) Prima disequazione
$(x-2)(x^2 - 6x + 5) > 0$
Pongo entrambe i fattori maggiori di zero

$x - 2 > 0$
$x^2 - 6x + 5 > 0$

- la prima $x - 2 > 0$ e' verificata per $x > 2$
- la seconda $x^2 - 6x + 5 > 0$ e' verificata per $x < 1 \cup x > 5$

quindi il mio sistema e' equivalente al sistema
$x > 2$
$x < 1 \cup x > 5$

Riportiamo su un grafico, evidenziando con un più dove il fattore e' positivo e con un meno dove e' negativo.
Nella riga in blu metto il segno dell'espressione prodotto



Ora faccio i calcolo dei segni: siccome devo prendere dove l'espressione e' positiva l'espressione prodotto sarà positiva dove entrambe i fattori sono positivi oppure dove sono entrambe negativi
La soluzione e'
$1 < x < 2 \ \cup \ x > 5$

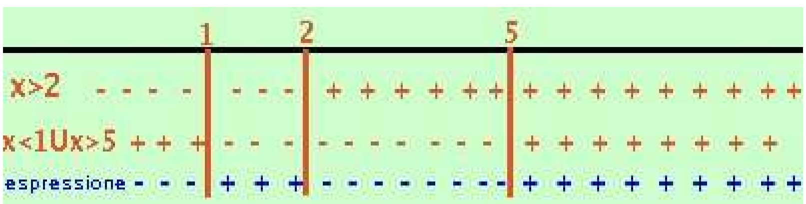
2) Seconda disequazione
se dobbiamo risolvere $(x-2)(x^2 - 6x + 5) < 0$
ci comportiamo esattamente allo stesso modo fino alla considerazione del risultato finale:
Pongo entrambe i fattori maggiori di zero (tanto il segno dell'espressione lo studio alla fine)

$x - 2 > 0$
$x^2 - 6x + 5 > 0$

- la prima $x - 2 > 0$ e' verificata per $x > 2$
- la seconda $x^2 - 6x + 5 > 0$ e' verificata per $x < 1 \cup x > 5$

quindi il mio sistema e' equivalente al sistema
$x > 2$
$x < 1 \cup x > 5$

Riporto su un grafico, evidenziando con un più dove il fattore e' positivo e con un meno dove e' negativo.



Nella riga in blu metto il segno dell'espressione prodotto
Considerazione del risultato finale
Ora faccio i calcolo dei segni: stavolta devo prendere dove l'espressione e' negativa
L'espressione sarà negativa dove il prodotto dei segni dei fattori mi da' un risultato negativo, cioe' dove i due fattori hanno segni contrari
La soluzione e'
$x < 1 \quad U \quad 2 < x < 5$

Applicazioni a disequazioni quoziente di espressioni di primo e secondo grado

Siccome il quoziente si comporta, per i segni, come il prodotto quando si ha un quoziente deve pensare che ogni quoziente e' equivalente a più sistemi di disequazioni

---

Ad esempio se si ha

$$\frac{x - 3}{x^2 - 6x + 5} > 0$$

siccome si deve trovare dove il quoziente e' maggiore di zero si potrà considerare le soluzioni che vanno bene per i due sistemi

$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-3 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$$

Infatti se numeratore e denominatore dell'espressione sono entrambe positivi oppure entrambe negativi allora l'espressione prodotto e' positiva
Se invece hai:

$$\frac{x - 3}{x^2 - 6x + 5} < 0$$

siccome devi trovare dove il quoziente e' minore di zero potrai considerare le soluzioni che vanno bene per i due sistemi

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases}$$

Infatti se numeratore e denominatore dell'espressione hanno segno contrario allora l'espressione e' negativa
la regola dei segni del quoziente e' identica a quella per il prodotto

---

Anche qui, senza dover risolvere piu' sistemi, pero', e' piu' semplice porre sia il numeratore che il denominatore maggiori di zero (sia che l'espressione sia maggiore che minore di zero) e poi controllare dove il prodotto dei segni di queste espressioni risulta positivo oppure negativo. (Cio' equivale a risolvere contemporaneamente tutti i sistemi)

Applicazioni a disequazioni più complesse

Quando abbiamo espressioni più complesse possiamo applicare i metodi visti ora: si tratterà di considerare sistemi con più disequazioni.
Consideriamo per ora il caso di disequazioni composte da prodotti e frazioni di

espressioni di primo e di secondo grado, più avanti considereremo equazioni di grado superiore
Procederemo nel seguente modo

- porremo ogni fattore presente al numeratore o al denominatore maggiore di zero
- risolveremo il sistema e porremo i risultati in un grafico
- Nell'ultima riga del grafico andremo a calcolare (con la regola del prodotto dei segni) il segno dell'espressione
- Prenderemo come risultato i valori richiesti dall'espresione di partenza

Vediamo il metodo su alcuni esercizi

---

1)

$$\frac{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + x + 1)(x + 4)}{(x - 2)(x^2 + 9)} < 0$$

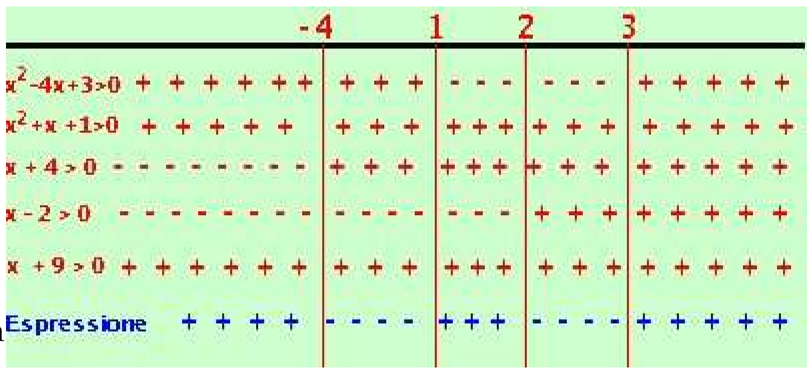
risolviamo la disequazione:

$$\frac{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + x + 1)(x + 4)}{(x - 2)(x^2 + 9)} < 0$$

Pongo ogni fattore al numeratore e al denominatore maggiore di zero
$x^2 - 4x + 3 > 0$
$x^2 + x + 1 > 0$
$x + 4 > 0$
$x - 2 > 0$
$x^2 + 9 > 0$

- la prima $x^2 - 4x + 3 > 0$ e' verificata per $x < 1 \quad U \quad x > 3$ Calcoli
- la seconda $x^2 + x + 1 > 0$ e' sempre verificata Calcoli
- la terza $x + 4 > 0$ e' verificata per $x > -4$
- la quarta $x - 2 > 0$ e' verificata per $x > 2$
- la quinta $x^2 + 9 > 0$ e' sempre verificata Calcoli

quindi il mio sistema e' equivalente al sistema
$x < 1 \quad U \quad x > 3$
sempre positiva
$x > -4$
$x > 2$
sempre positiva



Riporto su un grafico, evidenziando con un più dove il fattore e' positivo e con un

meno dove e' negativo.
Nella riga in blu metto il segno dell'espressione quoziente
Ora faccio il calcolo dei segni: siccome devo prendere dove l'espressione e' negativa l'espressione quoziente sarà negativa dove il prodotto dei segni di tutti i fattori da' risultato negativo

---

La soluzione e'
$-4 < x < 1 \quad U \quad 2 < x < 3$

Disequazioni di grado superiore

Si deve scomporre le espressioni in fattori di primo e secondo grado e quindi applicare i metodi già visti.
Alcuni esempi chiariranno meglio come procedere

$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 > 0$

Esercizio su disequazione di quarto grado

Risolviamo la disequazione:
$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 > 0$
Consideriamo il polinomio associato
$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 =$
devo scomporlo in fattori; sono 5 termini, non riesco a fare dei raggruppamenti, quindi applico la scomposizione di Ruffini
provo a scomporre per:
$(x-1), \quad P(1)= 1^4 -5 \cdot 1^3 +5 \cdot 1^2 +5 \cdot 1 - 6 = 1 - 5 + 5 - 5 + 6 = 0$
quindi (x-1) e' un fattore: divido per (x-1)
faccio la divisione di Ruffini

	1	-5	5	5	-6
1		1	-4	1	6
	1	-4	1	6	0

Ottengo quindi
$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x^3 -4x^2 + x + 6) =$
Continuo la scomposizione del secondo fattore: sono 4 termini:

- Non e' il cubo di un binomio

- non e' un raccoglimento parziale
- non mi sembra un raggruppamento
- quindi applico la scomposizione di Ruffini

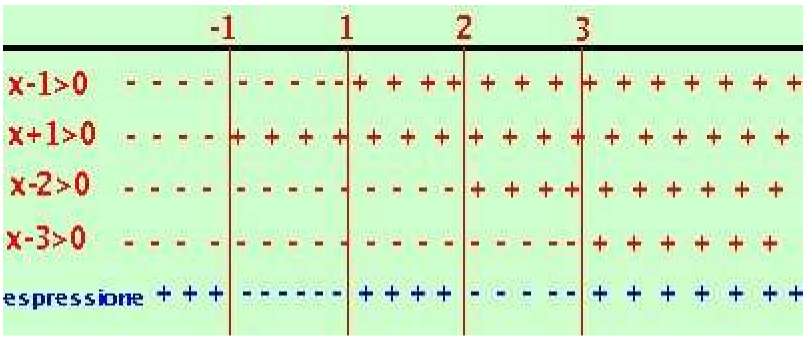
---

provo a scomporre per
$(x-1)$, $P(1)= 1^3 -4 \cdot 1^2 + 1 - 6 = 1 - 4 + 1 + 6 \neq 0$
$(x+1)$, $P(1)= (-1)^3 -4 \cdot (-1)^2 +(-1) - 6 = -1 - 4 - 1 + 6= 0$
Quindi (x+1) e' un fattore; divido per (x+1)

	1	-4	1	6
-1		-1	5	-6
	1	-5	6	0

quindi ottengo
$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x^3 -4x^2 + x + 6) = (x-1)(x+1)(x^2-5x+6)$
Ora devo decidere se voglio fare la disequazione con fattori di primo e secondo grado oppure solo con fattori di primo grado scomponendo anche l'ultimo fattore tra parentesi. Un metodo vale l'altro: per scomporre l'ultimo termine posso applicare la scomposizione del trinomio notevole, cioe'
$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$
e quindi avro':
$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x-1)(x+1)(x-2)(x-3) > 0$
poniamo ogni fattore maggiore di zero

- $x - 1 > 0$ $\quad x > 1$
- $x + 1 > 0$ $\quad x > -1$
- $x - 2 > 0$ $\quad x > 2$
- $x - 3 > 0$ $\quad x > 3$



Adesso riporto i risultati su un grafico indicando con un + dove ogni disequazione e' verificata e con un - dove non e' verificata e faccio il conto dei segni:
devo prendere gli intervalli dove il prodotto dei segni dei fattori (cioe' il segno dell'espressione) risulta positivo.

Ottengo come risultato:
$x < -1 \quad U \quad 1 < x < 2 \quad U \quad x > 3$

Disequazioni irrazionali ad indice pari

Una disequazione irrazionale e' una disequazione in cui un'espressione contenente l'incognita si trova sotto il segno di radice.
Chiamando F(x) e G(x) le espressioni contenenti la x considereremo i casi

- Disequazione elementare del tipo $F(x) > \sqrt{G(x)}$
- Disequazione elementare del tipo $F(x) < \sqrt{G(x)}$
- Disequazioni più complesse
- Caso particolare

Se invece di > abbiamo ≥ dovremo adattare le nostre soluzioni anche all'uguaglianza: per ogni caso in fondo alla pagina sarà trattata anche l'uguaglianza

Disequazione elementare del tipo $F(x) > \sqrt{G(x)}$

Dobbiamo risolvere:

$F(x) > \sqrt{G(x)}$

Il ragionamento da fare e' il seguente:

- Il termine sotto radice (radicando) deve sempre essere maggiore o uguale a zero
  $G(x) \geq 0$
- Essendo il radicale definito positivo (o nullo) anche il primo termine (essendo maggiore del secondo) dovrà essere positivo
  $F(x) > 0$
- Il quadrato del primo termine dovrà essere maggiore del quadrato del secondo termine (infatti finora abbiamo supposto che sono entrambe positivi ma non che il primo e' maggiore del secondo)
  $[F(x)]^2 > G(x)$

Quindi l'espressione si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} G(x) \geq 0 \\ F(x) > 0 \\ [F(x)]^2 > G(x) \end{cases}$$

E la soluzione del sistema fornirà le soluzioni della disequazione

Esercizio

Risolvere la disequazione

$(x-2) > \sqrt{x^2 - 16}$

- Il radicando deve sempre essere maggiore o uguale a zero
  $x^2 - 16 \geq 0$
- Essendo il radicale definito positivo (o nullo) anche il primo termine (essendo maggiore del secondo) dovra' essere positivo
  $x - 2 > 0$
- Il quadrato del primo termine dovra' essere maggiore del quadrato del secondo termine
  $(x - 2)^2 > x^2 - 16$

Debbo quindi risovere il sistema

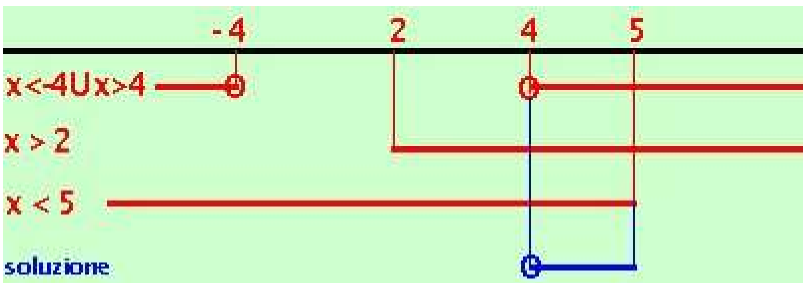
$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ (x-2)^2 > x^2 - 16 \end{cases}$$

dopo alcuni calcoli otteniamo:

$$\begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x < 5 \end{cases}$$

- la prima $x^2 - 16 \geq 0$ e' verificata per $x \leq -4 \quad U \quad x \geq 4$
- la seconda $x - 2 > 0$ e' verificata per $x > 2$
- la terza e' verificata per $x < 5$

Essendo un sistema devo prendere le soluzioni comuni
Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove e' accettabile l'uguale li indico con un cerchietto



Devo prendere i valori che risolvono contemporaneamente tutte e tre le disequazioni: ottengo come risultato
$4 \leq x < 5$

Disequazione elementare del tipo $F(x) < \sqrt{G(x)}$

Dobbiamo risolvere:

$$F(x) < \sqrt{G(x)}$$

Intanto abbiamo due possibilità:

- $F(x) > 0$
- $F(x) < 0$

a) se $F(x) > 0$ allora

- Il termine sotto radice (radicando) deve sempre essere maggiore di zero
  $G(x) > 0$
- per ipotesi
  $F(x) > 0$
- Il quadrato del primo termine dovra' essere minore del quadrato del secondo termine
  $[F(x)]^2 < G(x)$

La prima condizione e' gia' contenuta nella terza (G(x) e' maggiore di un quadrato che e' certamente positivo) quindi l'espressione si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} F(x) > 0 \\ [F(x)]^2 < G(x) \end{cases}$$

b) se $F(x) < 0$ allora perché la disequazione sia verificata e' sufficiente che il termine sotto radice (radicando) sia maggiore o uguale a zero $G(x) \geq 0$, perché in tal caso posso fare il radicale ed il radicale e' definito positivo o nullo quindi l'espressione si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} F(x) < 0 \\ G(x) \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio

Risolvere la disequazione

$$(x+3) < \sqrt{x^2 - 3}$$

Debbo risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ (x + 3)^2 < x^2 - 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 - 3 \geq 0 \end{cases}$$

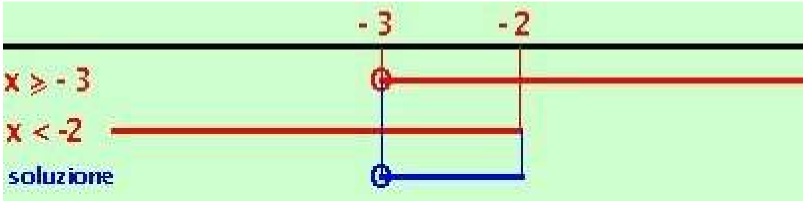
- risolviamo il primo

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ (x + 3)^2 < x^2 - 3 \end{cases}$$

sviluppiamo la seconda equazione e dopo alcuni otteniamo:

$$\begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x < -2 \end{cases}$$

la prima $x + 3 \geq 0$ e' verificata per $x \geq -3$
la seconda e' verificata per $x \leq -2$
Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove e' accettabile l'uguale li indico con un cerchietto. Essendo un sistema prendo le soluzioni comuni
Abbiamo come soluzione $-3 \leq x < -2$

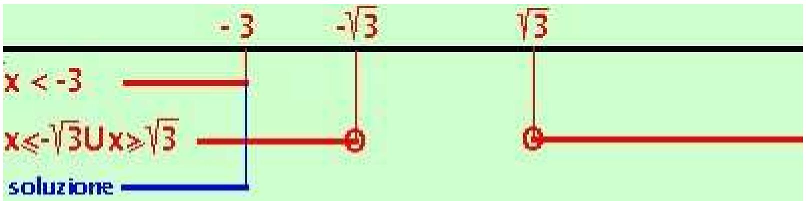


- risolviamo il secondo

$$\begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 - 3 \geq 0 \end{cases}$$

la prima $x + 3 < 0$ e' verificata per $x < -3$
la seconda $x^2 - 3 \geq 0$ e' verificata per $x \leq -\sqrt{3} \cup x \geq \sqrt{3}$

Riporto su un grafico, evidenziando con una linea marcata i valori che risolvono le disequazioni, i valori dove e' accettabile l'uguale li indico con un cerchietto. Abbiamo come soluzione $x < -3$



Adesso devo "cucire" le soluzioni dei due sistemi ed ottengo il risultato finale: le soluzioni della disequazione iniziale sono
$x < -2$

Disequazioni irrazionali a indice dispari

Quando l'indice del radicale e' dispari posso tranquillamente elevare a potenza in modo da far sparire i radicali, senza nessun problema.
Vediamo un piccolo esempio:

Risolvere la seguente disequazione

$$\sqrt[3]{x + 1} > 2$$

elevo al cubo da una parte e dall'altra
ottengo
$x + 1 > 8$
$x > 8 - 1$

ed ottengo come risultato finale
$x > 7$

Equazioni logaritmiche

Sono equazioni in cui la x compare nell'argomento del logaritmo;
Per risolverle si cerca di ottenere un solo logaritmo sia prima che dopo l'uguale in modo da poter uguagliare gli argomenti; però, uguagliando gli argomenti si potrebbero aggiungere soluzioni non possibili: infatti l'argomento del logaritmo deve sempre essere maggiore di zero.
Per risolvere il problema esistono due metodi:

- Primo metodo:
  prima di iniziare a risolvere le equazioni si fa un sistema ponendo tutti gli argomenti maggiori di zero, si risolve il sistema e si trova l'intervallo in cui le soluzioni sono valide.
  Successivamente si va a risolvere l'equazione logaritmica e, una volta trovate le soluzioni, si controlla che cadano entro l'intervallo di validita'
- Secondo metodo
  si risolve l'equazione e quindi si sottituiscono le soluzioni una alla volta nell'equazione iniziale per controllare se i logaritmi sono validi

Il secondo metodo e' forse piu' semplice ed intuitivo, ma il primo metodo ti predispone il discorso sulla risoluzione delle disequazioni logaritmiche

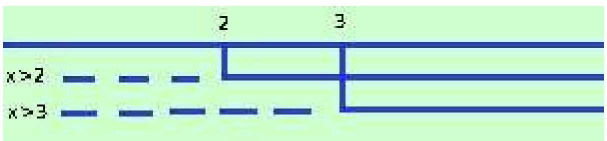
Risolvere la seguente equazione logaritmica
$\log(x-2) - \log(x-3) = \log 4$
Siccome il logaritmo e' definito solamente se l'argomento e' maggiore di zero dovremo risolvere l'equazione sotto le condizioni:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$$

risolvo

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases}$$

Essendo un sistema devo prendere l'intervallo dove sono valide contemporaneamente le disequazioni cioe'



$\boxed{x > 3}$

Adesso passo a risolvere l'equazione

$\log(x-2) - \log(x-3) = \log 4$

Per la regola del logaritmo di un quoziente posso scrivere

$$\log \frac{x-2}{x-3} = \log 4$$

cioè, uguagliando gli argomenti

$$\frac{x-2}{x-3} = 4$$

Supponendo x diverso da 3 (sovrabbondante perché x = 3 era già escluso dalle condizioni iniziali) faccio il m.c.m.

$$\frac{x-2}{x-3} = \frac{4(x-3)}{x-3}$$

tolgo i denominatori

$x - 2 = 4(x - 3)$

calcolo

$x - 2 = 4x - 12$

$x - 4x = 2 - 12$

$-3x = -10$

$x = 10/3$

Ora devo controllare che la soluzione cada nell'intervallo di definizione: 10/3 e' maggiore di 3 quindi la soluzione

$$x = \frac{10}{3}$$

e' accettabile

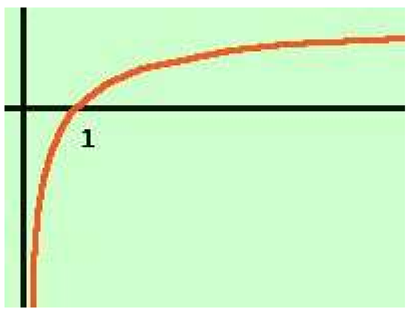
Disequazioni logaritmiche

Per risolverle si deve sempre porre le condizioni che l'argomento del logaritmo sia maggiore di zero

distinguiamole in due gruppi

- disequazioni con logaritmi a base maggiore di 1
- disequazioni con logaritmi a base compresa fra 0 ed 1

Disequazioni logaritmiche con base maggiore di 1



Se la base e' maggiore di 1 il grafico della funzione e' quello riportato qui a fianco.
Per risolvere cercheremo sempre di arrivare ad una delle due forme

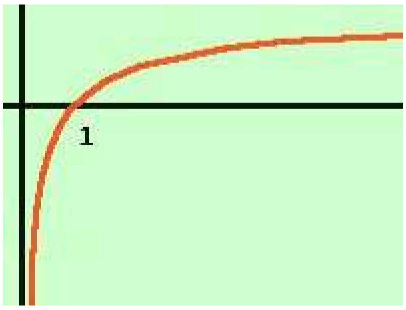
- $\log_a(\text{espressione}) > 0$
  il logaritmo e' maggiore di zero quando l'argomento e' maggiore di uno quindi possiamo scrivere in modo equivalente
  espressione > 1

- $\log_a(\text{espressione}) < 0$
  il logaritmo è minore di zero quando l'argomento e' compreso fra zero ed uno quindi possiamo scrivere in modo equivalente
  $$\begin{cases} \text{espressione} > 0 \\ \text{espressione} < 1 \end{cases}$$

Vediamo ora alcuni esercizi che ti chiariranno meglio il metodo

Risolvere la seguente disequazione logaritmica
$\log_2 x > 1 - \log_2(x-1)$
Come prima cosa poniamo la condizione che gli argomenti dei logaritmi siano positivi
$x > 0$
$x - 1 > 0$
Trasformiamola ora nella forma
$\log_2(\text{espressione}) > 0$
Porto tutti i termini prima del maggiore
$\log_2 x - 1 + \log_2(x-1) > 0$
ricordo che $1=\log_2 2$
$\log_2 x - \log_2 2 + \log_2(x-1) > 0$
e, per i teoremi sui logaritmi, posso scrivere

$$\log_2 \frac{x(x-1)}{2} > 0$$



Confrontando con il grafico della funzione logaritmo qui a destra vedo che essendo il logaritmo maggiore di zero (sopra l'asse delle x) devo porre l'argomento maggiore di 1

$$\frac{x(x-1)}{2} > 1$$

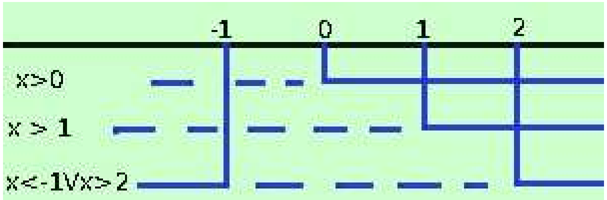
cioè facendo il minimo comune multiplo
$x(x-1) > 2$
e, facendo i calcoli
$x^2 - x > 2$
$x^2 - x - 2 > 0$
Mettendo assieme questa relazione con le condizioni per la realta' dei logaritmi devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 1 > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases}$$

Ottengo

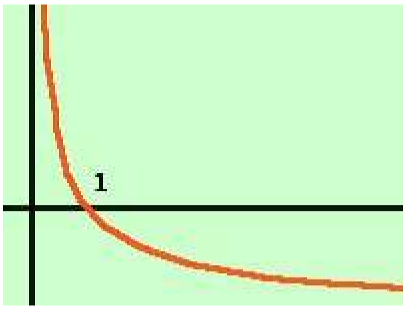
$$\begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \\ x < -1 \vee x > 2 \end{cases}$$

Riporto i dati su un grafico e prendo i valori comuni a tutte le disequazioni indico i valori accettabili con una linea continua ed indico i non accettabili con una linea tratteggiata



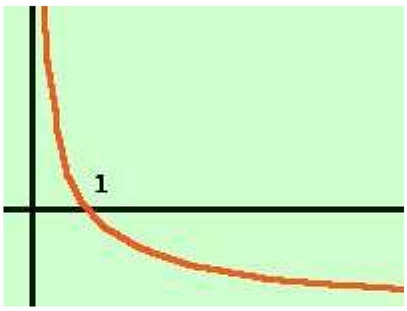
Ottengo quindi $x > 2$

Disequazioni logaritmiche con base minore di 1



Se la base e' minore di 1 il grafico della funzione e' quello riportato qui a fianco.
Per risolvere cercheremo sempre di arrivare ad una delle due forme

- $\log_a(\text{espressione}) > 0$
  il logaritmo e'maggiore di zero quando l'argomento e' compreso fra zero ed uno quindi possiamo scrivere in modo equivalente
  $$\begin{cases} \text{espressione} > 0 \\ \text{espressione} < 1 \end{cases}$$
- $\log_a(\text{espressione}) < 0$
  il logaritmo e' minore di zero quando l'argomento e' maggiore di uno quindi possiamo scrivere in modo equivalente
  espressione > 1

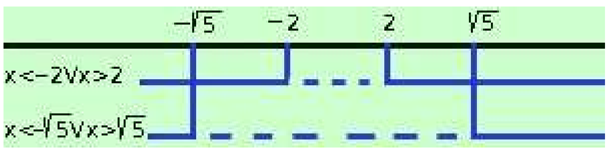


Iniziamo con una disequazione molto semplice
Risolvere la seguente disequazione logaritmica
$\log_{1/4}(x^2 - 4) < 0$
Come prima cosa poniamo la condizione che l' argomento del logaritmo sia positivo
$x^2 - 4 > 0$
che equivale a
$x < -2 \vee x > 2$

La disequazione e' già nella forma
$\log_{1/4}(\text{espressione}) < 0$
Confrontando con il grafico della funzione logaritmo qui a destra vedo che essendo il logaritmo minore di zero (sotto l'asse delle x) devo porre l'argomento maggiore di 1
$x^2 - 4 > 1$
cioè
$x^2 > 5$
che equivale a
$x < -\sqrt{5} \lor x > \sqrt{5}$
Mettendo assieme questa relazione con la condizione per la realta' del logaritmo devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x < -2 \lor x > 2 \\ x < -\sqrt{5} \lor x > \sqrt{5} \end{cases}$$

Riporto i dati su un grafico e prendo i valori comuni alle due disequazioni
indico i valori accettabili con una linea continua ed indico i non accettabili con una linea tratteggiata



Ottengo quindi $x < -\sqrt{5} \lor x > \sqrt{5}$

Equazioni esponenziali

Sono equazioni in cui la x compare all'esponente della potenza;
Per risolverle si cerca di ottenere una potenza sia prima che dopo l'uguale, con la stessa base in modo da poter uguagliare gli argomenti;

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \iff f(x) = g(x)$$

Se non e' possibile farlo si cerca di trasformarla in equazione logaritmica in modo da poter operare un cambiamento di base

Vediamo qualche esempio
Risolvere le seguenti equazioni

Risolvere la seguente equazione esponenziale

$2^{x^2 - 5x + 6} = 1$

Per la regola delle potenze ad esponente zero posso scrivere

$2^{x^2 - 5x + 6} = 2^0$

cioè, uguagliando gli esponenti

$x^2 - 5x + 6 = 0$

Applico la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{[25 - 4(1)(6)]}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{[25 - 24]}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2}$$

ottengo due soluzioni

$x = 2$ $x = 3$

Disequazioni esponenziali

Definizione. Si chiama disequazione esponenziale elementare ogni disequazione che sia riconducibile ad una delle seguenti forme

$$a^x < b, \quad a^x > b, \quad a^x \leq b, \quad a^x \geq b$$

con $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$.

Risolvere una disequazione esponenziale elementare significa cercare gli intervalli di numeri reali che rendono vera la disequazione. Ciò si può fare confrontando le ordinate dei punti del grafico della funzione esponenziale con le ordinate dei corrispondenti punti del grafico della funzione costante y=b.

Se il numero b è negativo o nullo si ha che la disequazione

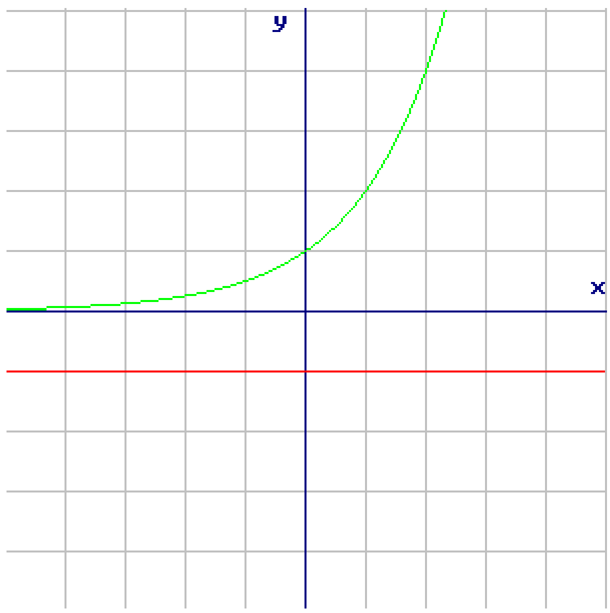
$a^x > b$ è verificata per qualunque valore reale della variabile x;

$a^x < b$ non è verificata per alcun valore reale della variabile x.

Esempio 1.

Risolvere la disequazione $2^x > -1$.

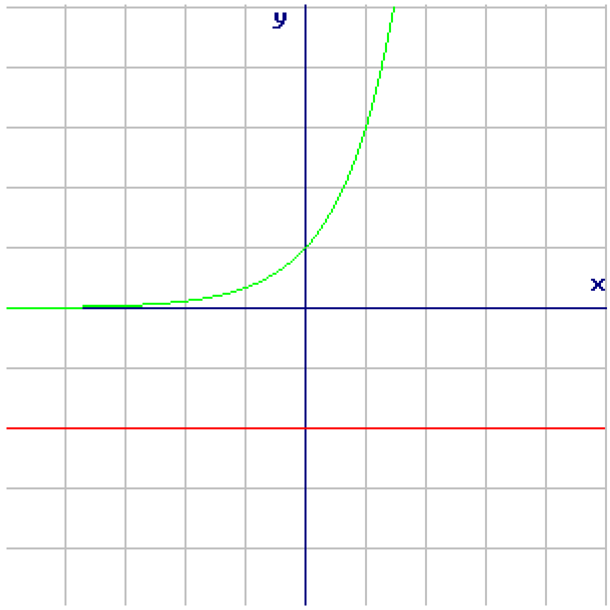
La disequazione è verificata per ogni x reale, vediamo la situazione in un grafico:



Esempio 2.

Risolvere la disequazione $3^x < -2$.

La disequazione non è verificata per nessun x reale, vediamo la situazione in un grafico:

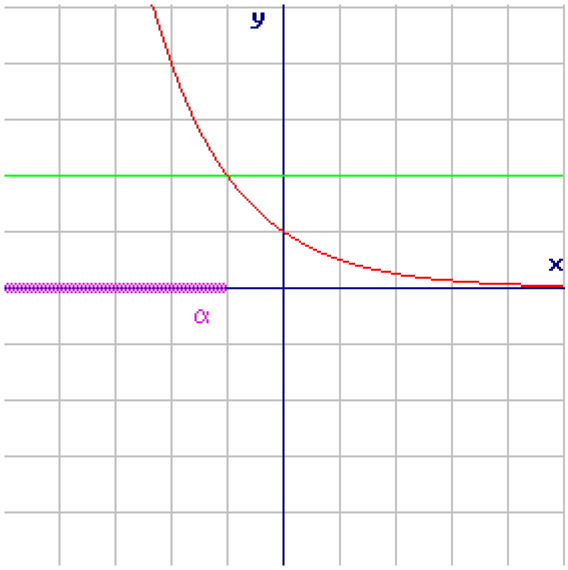


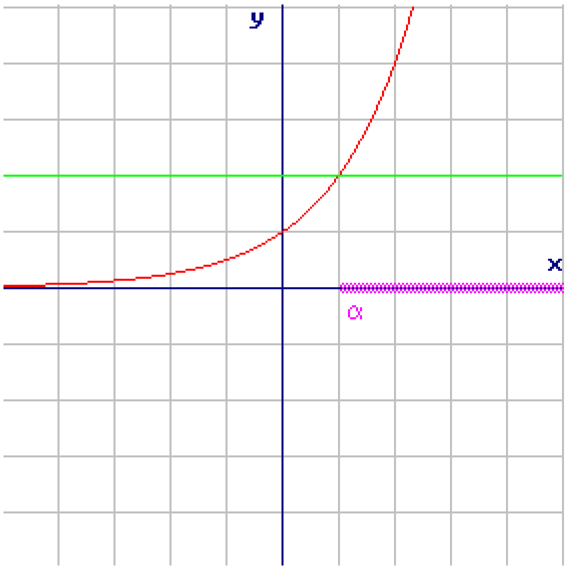
Se il numero b è positivo la disequazione esponenziale è, elementarmente, risolvibile solo se b è una potenza del numero reale a; distinguiamo due casi:

1° caso $0 < a < 1$

La funzione esponenziale è una funzione decrescente quindi il valore della potenza decresce al crescere dell'esponente: in altre parole la disequazione tra esponenziali si traduce in una disequazione tra gli esponenti ma con il verso cambiato (controversa). Quindi si ha

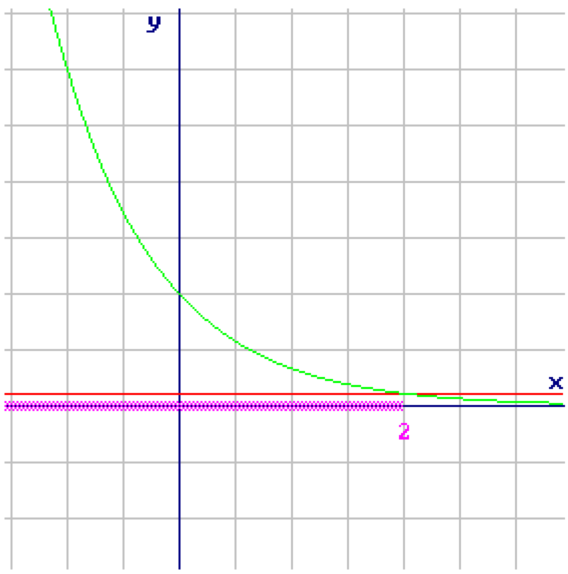
$a^x > a^\alpha$ se e solo se $x < \alpha$ $\qquad\qquad$ $a^x < a^\alpha$ se e solo se $x > \alpha$





Esempio 1.

Risolvere la disequazione $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{9}$.



Si può scrivere:

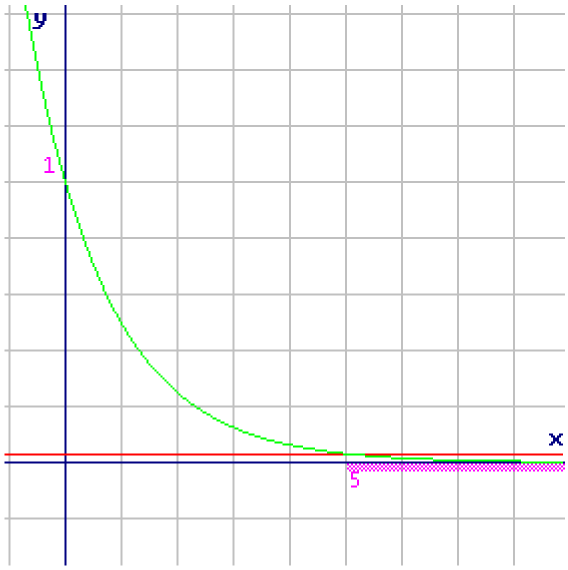
$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow x < 2$$

Nel grafico a sinistra la soluzione (evidenziata in colore rosa) è data da tutti i valori della x per i quali la curva verde (esponenziale)è posta sopra la curva rossa (retta), quindi l'intervallo

$(-\infty, 2)$

Esempio 2.

Risolvere la disequazione $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{32}$.



Si può scrivere

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow x > 5$$

Nel grafico a sinistra la soluzione (evidenziata in colore rosa) è data da tutti i valori della x per i quali la curva verde (esponenziale) è posta sotto la curva rossa (retta).

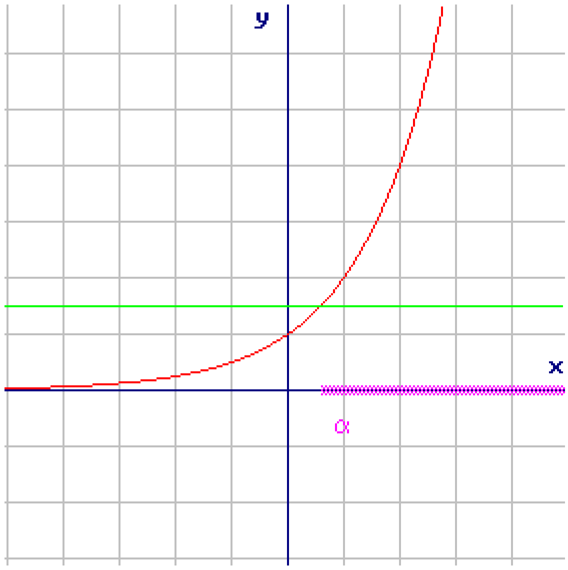
NB: per poter rappresentare graficamente la situazione è stato necessario utilizzare scale diverse sui due assi

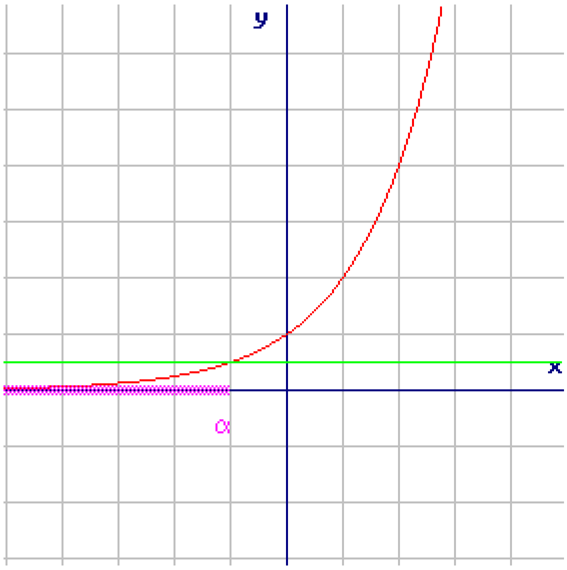
2° caso $a > 1$:

La funzione esponenziale è una funzione crescente, quindi il valore della potenza cresce al crescere dell'esponente: in altre parole la disequazione tra esponenziali si traduce in una disequazione tra gli esponenti con lo stesso verso.

Quindi si ha:

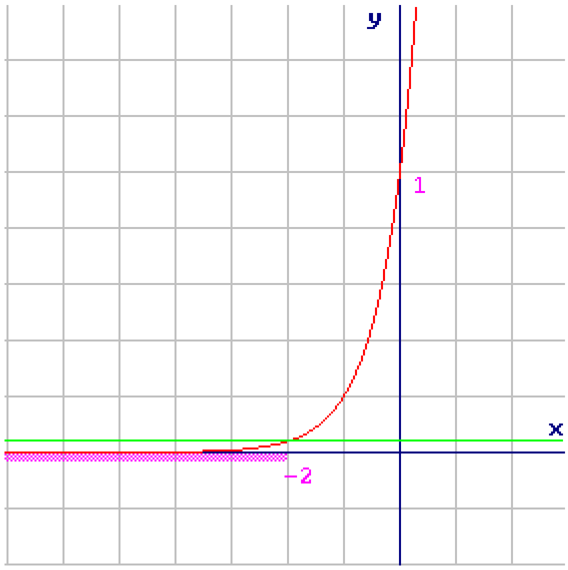
$a^x > a^\alpha$ se e solo se $x > \alpha$ $a^x < a^\alpha$ se e solo se $x < \alpha$





Esempio 1.

Risolvere la disequazione $5^x < \dfrac{1}{25}$.



Possiamo scrivere:

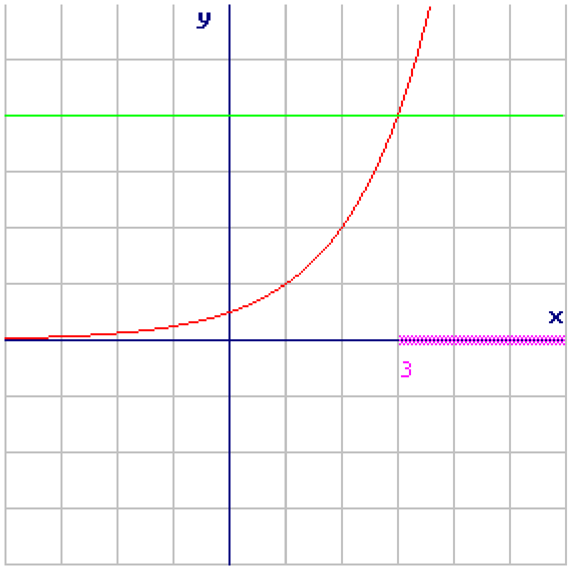
$$5^x < \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow 5^x < (5)^{-2} \Rightarrow x < -2$$

Nel grafico a sinistra la soluzione (evidenziata in colore rosa) è data da tutti i valori della x per i quali la curva rossa (esponenziale) è posta sotto la curva verde (retta).

NB: per poter rappresentare graficamente la situazione è stato necessario utilizzare scale diverse sui due assi

Esempio 2.

Risolvere la disequazione $2^x > 8$.



Si ha subito:

$$2^x > 8 \Rightarrow 2^x > 2^3 \Rightarrow x > 3$$

Fino ad ora abbiamo esaminato solo esempi in cui entrambi termini dell'equazione compaiono potenze aventi la stessa base, se b non è una potenza di a occorre applicare i logaritmi, utilizzando il seguente schema.

Disequazione	Soluzioni	**Condizione**
$A^x > B$	$x > \log_A B$	se $A > 1$
$A^x > B$	$x < \log_A B$	se $0 < A < 1$
$A^x < B$	$x < \log_A B$	se $0 < A < 1$
$A^x < B$	$x > \log_A B$	se $A > 1$

Osserviamo la procedura di risoluzione in tutti i passaggi, mettendo in evidenza il ruolo di di A:

$$A^x > B \quad \Rightarrow \quad A^x > A^{\log_A B} \quad \Rightarrow \quad x > \log_A B \quad \text{se A} > 1$$

poiché per A >1 la funzione esponenziale è strettamente crescente;

$$A^x > B \quad \Rightarrow \quad A^x > A^{\log_A B} \quad \Rightarrow \quad x < \log_A B \quad \text{se } 0 < \text{A} < 1$$

poiché per 0 < A < 1 la funzione esponenziale è strettamente decrescente.

Notiamo che

$$A^x = B \quad \Rightarrow \quad x = \log_A B$$

e quindi è lecito sostituire:

$$x \text{ con } \log_A B$$

ottenendo l'identità:

$$A^{\log_A B} = B$$

utilizzata nei passaggi di risoluzione della disequazione.