Appunti sulle equazioni differenziali

Si chiama **equazione differenziale** un tipo particolare di *equazione funzionale*, nella quale la funzione incognita compare insieme ad alcune sue derivate, ossia un'equazione nella quale oltre alle normali operazioni algebriche e trascendenti è ammessa l'operazione di derivazione.
Ad esempio le equazioni:

$y'=\cos x$; $y'=e^y+y^2-y$; $y''-3y'=0$

sono tutte equazioni differenziali, mentre l'equazione

$y' - \int y dx = x + 1 - \ln x$

non è un'equazione differenziale, perchè vi compare l'operazione di integrazione.

Si dice **ordine** di un'equazione differenziale il massimo ordine di derivazione che in essa compare. Dei tre esempi sopra citati, i primi due riguardano equazioni del primo ordine, mentre l'ultima equazione differenziale è del secondo ordine.

Si chiama **soluzione** o **integrale generale** di un'equazione differenziale di ordine *n* una funzione di classe C^n su un opportuno insieme che verifichi l'equazione.
Se ad esempio scriviamo l'equazione in **forma normale**, ossia come

$y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$,

e $y=y(x)$ è una sua soluzione, la relazione

$y^{(n)}(x)=f[x,y(x),y'(x),...,y^{(n-1)}(x)]$

deve essere un'identità.

Consideriamo ad esempio la semplice equazione differenziale del primo ordine:

$y'=\cos x$

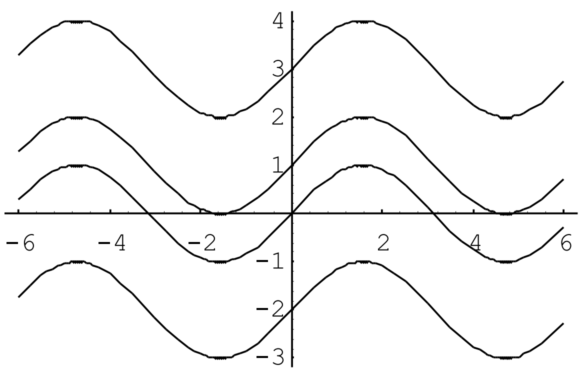
La funzione

$y=3+\sin x$

è soluzione dell'equazione, in quanto la sua derivata è proprio $y'=\cos x$.
E' però evidente che tutte le funzioni della forma

$y=k+\sin x$, con k costante reale

sono soluzioni dell'equazione. Ci accorgiamo dunque che la soluzione dell'equazione differenziale del primo ordine considerata non è unica e dipende da una **costante arbitraria**.



Nella figura sono riportate alcune delle soluzioni dell'equazione proposta.
Chiamiamo **integrale generale** dell'equazione differenziale una soluzione della forma

$y=f(x)+k$, oppure

$y=kf(x)$,

dalla quale si ottengono tutte le **soluzioni particolari** con la semplice attribuzione di un valore particolare alla costante arbitraria k.
Se, ad esempio, consideriamo l'equazione

$y'+y=0$,

si può facilmente verificare che, oltre alla soluzione banale y=0, anche le funzioni della forma

$y=ke^{-x}$

sono soluzioni dell'equazione, per ogni valore di k. E quindi sono soluzioni particolari dell'equazione assegnata le funzioni

$y= e^{-x}$, $y=-3\ e^{-x}$, $y=15\ e^{-x}$, etc.

Può capitare che la costante arbitraria k non possa assumere ogni valore reale, ma sia necessario porre su essa alcune limitazioni.

Se ad esempio si desidera risolvere sull'intervallo [-1,1] l'equazione differenziale

$y'=1/(2y)$

è facile verificare che $y=\sqrt{x+k}$ è soluzione dell'equazione differenziale. E' altrettanto evidente che, affinchè la soluzione esista per ogni x dell'intervallo [-1,1], k deve essere scelto in modo tale che il radicando non sia negativo. Questo succede per $x \geq -k$ e, perché questa condizione non elimini parte dell'intervallo [-1,1] occorre che sia $-k \leq -1$ ossia $k \geq 1$.

Spesso non si è interessati all'intera famiglia di soluzioni di un'equazione differenziale, ma si desidera ottenere una soluzione particolare.
In questo caso si deve formulare un **problema di Cauchy**, ossia una coppia di equazioni riguardanti la funzione incognita, del tipo

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

la cui soluzione può essere trovata, ad esempio, scegliendo il valore della costante arbitraria per il quale la soluzione espressa in forma di integrale generale della prima equazione verifica anche la seconda equazione.

Il problema che si pone è se un problema di Cauchy ammetta soluzione e, quando questo succeda, se tale soluzione sia unica. Vale il

Teorema di esistenza e unicità in grande: sia f :[a,b]xR→R continua e lipschitziana rispetto ad y in R, uniformemente rispetto a x in [a,b]. Allora, comunque scelto il punto (x_0,y_0) in [a,b]xR esiste una ed una sola funzione y:[a,b] →R, differenziabile con continuità e soluzione del problema di Cauchy, ossia tale che

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}.$$

L'ipotesi di lipshitzianità presente nell'enunciato del teorema significa che:

$$\exists k \in R : \forall y_1, y_2 \in R, \forall x \in [a,b] \quad |f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leq k|y_1-y_2|.$$

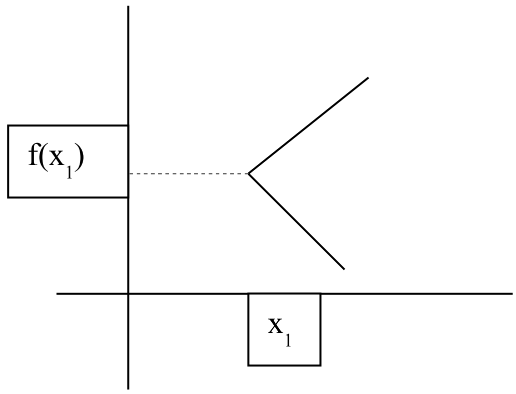
Per meglio comprendere il significato di questa definizione, diamo la definizione per una funzione reale di variabile reale, f:A→R:
f si dice lipschiziana in A se

$$\exists k \in R : \forall x_1, x_2 \in A, \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

Questa definizione è di più facile interpretazione. Infatti, fissati i punti x_1e x_2, con ad esempio $x_1<x_2$, la relazione sopra riportata significa che $f(x_1) - k(x_2 - x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_1) + k(x_2 - x_1)$.

Se osserviamo il disegno sotto riportato, il significato di questa relazione è che $f(x_2)$ deve trovarsi nella parte di piano delimitata dalle due semirette, di coefficiente angolare k e -k.

Questo ci dà dunque un'informazione sull'incremento che la funzione può subire nel passaggio da x_1a x_2, controllato dall'incremento subito dalle due rette e che quindi non è compatibile con variazioni troppo brusche (quali ad esempio si verificano in corrispondenza di punti a tangente verticale).



La definizione data inizialmente di funzione lipschitziana rispetto ad y in R, uniformemente rispetto ad x in [a,b] è l'equivalente di quella appena riportata: l'incremento della funzione è controllato, attraverso un coefficiente k, da quello della y ed esiste una costante k che vale per ogni punto x di [a,b].

Particolari equazioni differenziali

Equazioni differenziali a variabili separabili

Si consideri un'equazione differenziale della forma

$$y'=p(x)q(y)$$

Il differenziale di una funzione (differenziabile!) in un punto x_0 è: $df(x_0; h)=f'(x_0)h$.

Se scegliamo la funzione f(x)=1, la cui derivata è 1 in ogni punto, si ha: dx=1.h, ossia h=dx.

Utilizzando questa informazione, possiamo scrivere che per la soluzione y dell'equazione differenziale si ha dy=y'dx, dalla quale si può ricavare l'espressione della derivata nella forma di Leibnitz: $y' = \frac{dy}{dx}$.

Prima di effettuare nell'equazione differenziale questa sostituzione, osserviamo che la funzione q(y) presente al secondo membro potrebbe annullarsi. Se questo succede in corrispondenza di funzioni della forma y=k, con k costante, esse sono soluzioni dell'equazione differenziale in quanto annullano il secondo membro e anche il primo, in quanto la derivata di una costante è nulla.

Trovate queste soluzioni (se ne esistono), possiamo cercare eventuali altre soluzioni, per le quali sia $q(y) \neq 0$.
In queste condizioni, possiamo dividere i due membri dell'equazione per q(y) e moltiplicare per dx, ottenendo:

$$\frac{dy}{q(y)} = p(x)dx.$$

Integrando i due membri di questa relazione, si perviene alla soluzione:

$$\int \frac{dy}{q(y)} = \int p(x)dx + k, \text{ con k costante reale.}$$

Si noti che il passaggio dalla penultima relazione all'ultima è estremamente delicato: le due quantità uguali della penultima relazione vengono apparentemente trattate in modo diverso (al primo membro si integra rispetto ad y, al secondo rispetto ad x), ma il segno di uguaglianza è mantenuto. Questo è possibile grazie al principio di invarianza formale del differenziale (e alla regola di integrazione per sostituzione). Infatti y, soluzione dell'equazione differenziale, è una funzione della variabile x (y=y(x)) e quindi la funzione integranda al primo membro può essere scritta come $\frac{y'(x)dx}{q(y(x))}$.

Si consideri ad esempio l'equazione differenziale a variabili separabili

$$y' = \frac{x}{y}$$

Procedendo come sopra indicato, si osserva che y=0 non può essere soluzione dell'equazione differenziale in quanto fa perdere significato al secondo membro. Per $y \neq 0$, utilizzando la notazione di Leibnitz, si ottiene:
ydy=xdx, da cui, integrando, si ottiene $y^2=x^2+k$, cioè $y = \pm\sqrt{x^2 + k}$.

RIFLESSIONE
Abbiamo ottenuto due diverse famiglie di soluzioni. Come si concilia questo con il teorema di unicità? Qual è l'insieme di esistenza della soluzione? E quali valori assume la soluzione?

<u>**Equazioni differenziali lineari del primo ordine**</u>

L'equazione differenziale lineare del primo ordine ha una forma del tipo

$$y'+p(x)y=q(x)$$

L'equazione si dirà omogenea se q(x)=0, non omogenea in caso contrario.

Iniziamo a studiare l'equazione omogenea : y'+p(x)y=0, da cui y'=-p(x)y.

Una soluzione è y=0, che annulla il primo membro (perché la derivata di una costante è nulla) e il secondo. Cerchiamo altre soluzioni imponendo $y \neq 0$. Procedendo come sopra indicato per le equazioni a variabili separabili, otteniamo:

$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, da cui $\int \frac{dy}{y} = \int -p(x)dx + k$; si ha dunque $\ln|y| = -\int p(x)dx + k$, ossia $|y| = e^{-\int p(x)dx + k} = ce^{-\int p(x)dx}$, dove c>0 è data da c=$e^k$. Togliendo la condizione c>0 e il valore assoluto su y, è possibile scrivere tutte le soluzioni (anche y=0) mediante la relazione

$$y = ce^{-\int p(x)dx}$$

Nel caso l'equazione non sia omogenea, si può procedere come segue: moltiplichiamo i due membri dell'equazione per $e^{\int p(x)dx}$:

$$y' e^{\int p(x)dx} + p(x)y\, e^{\int p(x)dx} = q(x)\, e^{\int p(x)dx}$$

e introduciamo una nuova funzione z=y $e^{\int p(x)dx}$. Il primo membro dell'equazione è la derivata della funzione z e quindi l'equazione può essere riscritta nella forma

$$z' = q(x)\, e^{\int p(x)dx},$$

equazione differenziale a variabili separabili, la cui soluzione è

$$z = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + k.$$

Da questa si risale alla soluzione y:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left\{\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + k\right\}.$$

Si consideri ad esempio l'equazione differenziale lineare non omogenea del primo ordine:

$$y' + \frac{y}{x} = e^{-x}.$$

Nelle notazioni sopra utilizzate si ha: p(x)=1/x, q(x)=e^{-x}. La soluzione è quindi:

$$y = e^{-\int 1/x\, dx}\left\{\int e^{-x}e^{\int 1/x\, dx}dx + k\right\} = e^{-\ln x}\left\{\int e^{-x}e^{\ln x}dx + k\right\} = \frac{1}{x}\left\{\int xe^{-x}dx + k\right\} = \frac{1}{x}\left\{-xe^{-x} - e^{-x} + k\right\}$$

<u>Equazioni differenziali di Bernoulli</u>

Sono le equazioni differenziali della forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^a.$$

Se a=0, l'equazione si riduce a lineare del primo ordine, la cui soluzione è

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left\{\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + k\right\}.$$

Se a=1, l'equazione diventa a variabili separabili: y'=(q(x)-p(x))y, la cui soluzione è

$y = ce^{\int (q(x)-p(x))dx}$ (si veda la trattazione generale e l'esempio sopra riportati).

Se a≠0, 1, dopo aver osservato che, per a>0, y=0 è soluzione dell'equazione, si cercano le soluzioni non nulle dividendo i due membri per y^a:

$$y^{-a}y' + p(x)y^{1-a} = q(x)$$

Introduciamo ora una nuova funzione z=y^{1-a} e riscriviamo l'equazione, moltiplicata per 1-a, dopo aver osservato che la derivata di z vale: $z' = (1-a)y^{-a}y'$:

$$(1-a)y^{-a}y' + (1-a)p(x)y^{1-a} = (1-a)q(x)\text{, cioè}$$
$$z' + (1-a)p(x)z = (1-a)q(x),$$
equazione lineare non omogenea del primo ordine, di cui siamo in grado di calcolare la soluzione
$$z = e^{-(1-a)\int p(x)dx}\left\{\int (1-a)q(x)e^{(1-a)\int p(x)dx}dx + k\right\},$$
dalla quale, elevandola alla potenza $\frac{1}{1-a}$, si trova la soluzione dell'equazione differenziale di partenza.

Equazioni differenziali di ordine n

Un'equazione differenziale di ordine n può avere un'espressione del tipo:
$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$
in cui la derivata n-esima della funzione incognita y è scritta in funzione della variabile x e delle derivate di ordine inferiore.
L'equazione può essere riscritta a partire da equazioni differenziali del primo ordine.
Per raggiungere questo obiettivo, introduciamo n funzioni $y_1, y_2, \ldots, y_n$, riunite in un vettore $\underline{y}$, mediante la seguente definizione:
$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \ldots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$
Ogni funzione è definita a partire dalla funzione incognita y, di cui è la derivata di ordine pari al proprio indice diminuito di 1.
Teniamo ora conto del fatto che le funzioni così introdotte sono legate fra loro e che ci interessa che l'equazione differenziale da cui siamo partiti sia verificata. Tutto questo può essere espresso mediante il sistema:
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \ldots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}.$$
Notiamo che, al primo membro delle equazioni del sistema, compaiono le derivate delle nuove funzioni y_i, i=1,2,…,n , che possono essere riunite in una funzione $\underline{y}$ a valori in R^n e che il sistema può essere scritto come $\underline{y}'=\underline{g}\,(x,\underline{y})$, dove il vettore $\underline{g}$ ha le componenti: $(y_2,y_3,\ldots,y_n,f(x, y_1,y_2,\ldots,y_n))$.

Equazioni differenziali lineari di ordine n

Vengono indicate con questo nome le equazioni differenziali della forma:

$$a_o(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x),$$

che vengono a volte scritte come

$$\Lambda y = b(x),$$

nella quale compare l'operatore Λ , definito dalla relazione

$$\Lambda y = a_o(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y .$$

Consideriamo inizialmente il caso particolare delle equazioni differenziali lineari omogenee, caratterizzato dalla condizione

b(x)=0.

Osserviamo che se y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione

$$\Lambda y = 0,$$

ogni loro combinazione lineare è soluzione della stessa equazione.
Se infatti sostituiamo $hy_1+k\,y_2$ ad y nell'equazione omogenea, otteniamo:

$$a_o(hy_1 + k\,y_2)^{(n)} + a_1(hy_1 + k\,y_2)^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(hy_1 + k\,y_2)' + a_n(hy_1 + k\,y_2) =$$
$$= h\Lambda y_1 + k\Lambda y_2 = 0$$

Da ciò si deduce che, se riusciamo a trovare una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione, otteniamo tutte le soluzioni come combinazione lineare delle funzioni della base.

Come abbiamo già visto in vari contesti, il concetto di base è legato al concetto di indipendenza lineare.

Definizione: n funzioni $f_1,f_2,...,f_n : [a,b]\to R$ si dicono **linearmente dipendenti** su [a,b] se esistono n costanti, non tutte nulle, tali che la combinazione lineare

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_n f_n(x)$$

sia la funzione identicamente nulla su [a,b].

Definizione: le stesse funzioni si dicono **linearmente indipendenti** su [a,b] se l'unica combinazione lineare che risulta identicamente nulla su [a,b] è quella con tutti i coefficienti nulli.

Se le funzioni $f_i(x)$, i=1,2,...,n sono n-1 volte differenziabili, la dipendenza lineare può essere verificata attraverso la seguente

Condizione necessaria affinché n funzioni $f_i(x)$, i=1,2,...,n, n-1 volte differenziabili in un intervallo A siano linearmente **dipendenti** in A è che il loro *determinante wronskiano*, ossia il determinante della matrice wronskiana:

$$W(x)=\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & .... & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & .... & f_n'(x) \\ .... & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & .... & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

sia identicamente nullo in A.

Da questa condizione si deduce immediatamente la

Condizione sufficiente affinché n funzioni $f_i(x)$, i=1,2,...,n, n-1 volte differenziabili in un intervallo A siano linearmente **indipendenti** in A è che il loro determinante wronskiano sia diverso da zero in almeno un punto di A.

La condizione necessaria sopra enunciata non è, in generale, anche sufficiente a garantire la dipendenza lineare.
Se infatti consideriamo nell'intervallo [-1,1] le funzioni $f_1(x)=x^2$ ed $f_2(x)=x|x|$, si ha:

$$W(x)=\begin{bmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{bmatrix},$$

il cui determinante è identicamente nullo in [-1,1]. Se però proviamo a scrivere combinazioni lineari della forma

$$\alpha x^2 + \beta x|x|,$$

è evidente che la condizione di annullamento di tale combinazione con coefficienti non nulli su [-1,0] è $\alpha = \beta$, mentre su [0,1] tale condizione diventa $\alpha = -\beta$, compatibili solo se i coefficienti sono entrambi nulli. L'annullamento del determinante wronskiano, dunque, non implica la dipendenza lineare delle funzioni considerate.

Qualora le funzioni $f_i(x)$, i=1,2,...,n, siano soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n, però, l'annullamento del determinante wronskiano in almeno un punto di A diventa **condizione necessaria e sufficiente** perchè le funzioni siano linearmente dipendenti in A.
Si dimostra infatti che il determinante wronskiano di n soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n in A, se si annulla in un punto di A, è nullo in tutti i punti di A e, se in almeno un punto di A è non nullo, è non nullo su tutto A.

Ci chiediamo ora se, data un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n, esistano n suoi integrali linearmente indipendenti in un intervallo A.
La risposta è affermativa; sia infatti x_0 un punto di A e si considerino gli n problemi di Cauchy definiti a partire dall'equazione differenziale assegnata e dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y_i(x_0) = y_i'(x_0) = \ldots y_i^{(i-1)}(x_0) = y_i^{(i+1)}(x_0) = \ldots = y_i^{(n-1)}(x_0) = 0 \\ y_i^{(i)} = 1 \end{cases}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

dove si è chiamata y_i la soluzione dell'i-esimo problema di Cauchy.
Se i coefficienti $a_i(x)$ che compaiono nell'equazione sono funzioni continue, sono verificate le condizioni del teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di un problema di Cauchy e quindi le soluzioni y_i sopra definite esistono (e sono uniche). La loro matrice wronskiana, per come le abbiamo definite, coincide con la matrice identità di ordine n, il cui determinante è 1.
Le soluzioni y_i sono dunque n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale e possono costituire una base per lo spazio della soluzioni.

Trovare l'integrale generale di un'equazione differenziale lineare omogenea significa dunque cercare n soluzioni linearmente indipendenti.

A tale scopo, per il caso particolare in cui i coefficienti $a_i(x)$ siano costanti, ci chiediamo quali condizioni debba verificare il coefficiente α affinchè la funzione $y(x) = e^{\alpha x}$ sia soluzione dell'equazione differenziale.

Calcoliamo le derivate della funzione y(x):

$$y'(x) = \alpha e^{\alpha x}$$
$$y''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$$
.....
$$y^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x}$$

Se alla funzione incognita e alle sue derivate nell'equazione differenziale sostituiamo $y(x) = e^{\alpha x}$ e le sue derivate, otteniamo la condizione:

$$a_o\alpha^n e^{\alpha x} + a_1\alpha^{n-1}e^{\alpha x} + \ldots + a_{n-1}\alpha e^{\alpha x} + a_n e^{\alpha x} = 0,$$

dalla quale, raccogliendo $e^{\alpha x}$ a fattor comune e semplificando per tale fattore (mai nullo), si ottiene la condizione

$$a_o\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0$$

che viene chiamata *equazione caratteristica*.
Se l'equazione caratteristica (che è un'equazione algebrica di grado n) ammette **n soluzioni reali e distinte** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$
le funzioni

$$y_1 = e^{\alpha_1 x}, y_2 = e^{\alpha_2 x}, \ldots, y_n = e^{\alpha_n x}$$

hanno, su R, determinante wronskiano non nullo e quindi sono linearmente indipendenti e l'integrale generale dell'equazione può essere scritto come combinazione lineare $y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\alpha_i x}$.
Se una radice α ha **molteplicità k>1**, essa dà luogo a k soluzioni linearmente indipendenti:

$$y_1 = e^{\alpha x}, y_2 = xe^{\alpha x}, \ldots, y_k = x^{k-1}e^{\alpha x}.$$

Se infine α è una **radice complessa** dell'equazione caratteristica, anche il suo coniugato sarà soluzione dell'equazione caratteristica. Se scriviamo α nella forma algebrica

$$\alpha = a + ib$$

e consideriamo le due soluzioni relative ad α e al suo coniugato, otteniamo:

$$y_1 = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}[\cos(bx) + i sin(bx)]$$
$$y_2 = e^{(a-ib)x} = e^{ax}e^{-ibx} = e^{ax}[\cos(bx) - i sin(bx)].$$

Allo scopo di ottenere anche in questo caso soluzioni dell'equazione differenziale espresse nel campo reale, sommando membro a membro e dividendo per due, otteniamo

$$\overline{y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{ax}\cos(bx);$$

sottraendo membro a membro e dividendo per 2i, otteniamo

$$\overline{y_2} = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{ax} sin(bx)$$

e le due funzioni così ottenute sono soluzioni dell'equazione differenziale e risultano linearmente indipendenti fra loro e con tutte le altre.
Dette quindi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, di molteplicità, rispettivamente, $k_1, k_2, \ldots, k_r,\ con\ k_1 + k_2 + \ldots + k_r \le n$ le radici reali dell'equazione caratteristica e $\beta_1 = a_1 + ib_1,\ \beta_2 = a_2 + ib_2, \ldots, \beta_s = a_s + ib_s$ i numeri complessi che, con i loro coniugati, risolvono l'equazione caratteristica (che per semplicità pensiamo tutti di molteplicità 1), l'integrale generale dell'equazione differenziale è:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=0}^{k_i - 1} c_{i,k} x^k e^{\alpha_i x} \right) + \sum_{i=1}^{s} c_{r+1,i} e^{a_i x} \cos(bx) + \sum_{i=1}^{s} c_{r+2,i} e^{a_i x} sin(bx),$$

dove i coefficienti $c_{i,j}$ sono n costanti arbitrarie.

Affrontiamo ora la soluzione di un'equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti, ossia un'equazione della forma:

$$a_o y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ...+ a_{n-1} y' + a_n y = b(x),$$

con b(x) non identicamente nulla su un intervallo A.
Osserviamo che, se y_1 e y_2 sono soluzioni dell'equazione non omogenea, la loro differenza è soluzione dell'equazione omogenea. Si ha infatti:

$$\Lambda \left(y_1 - y_2 \right) = \Lambda y_1 - \Lambda y_2 = b(x) - b(x) = 0.$$

Da questa relazione si deduce che le soluzioni dell'equazione differenziale lineare non omogenea si possono ottenere sommando una soluzione dell'equazione non omogenea ed una soluzione particolare dell'equazione non omogenea e cioè che, se $\bar{y}$ è un integrale particolare dell'equazione non omogenea e y(x)=$\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea, le funzioni della forma y(x)+ $\bar{y}$(x) sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione differenziale lineare non omogenea.
Per le equazioni a coefficienti costanti abbiamo già descritto la ricerca dell'integrale generale dell'equazione omogenea; concentriamo quindi l'attenzione sulla ricerca di integrali particolari dell'equazione non omogenea.

Un metodo di validità generale per effettuare tale ricerca è il *metodo di variazione delle costanti arbitrarie.*
Il metodo si basa sulla ricerca di n funzioni $c_i(x),\ i = 1,2,...,n$ tali che la funzione
$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$ sia integrale particolare dell'equazione non omogenea, con $y_i(x),\ i = 1,2,...,n$ soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea (a partire dalle quali si è costruito l'integrale generale dell'equazione omogenea).
L'unica condizione che la funzione $\bar{y}$ deve verificare è l'equazione differenziale, ossia la condizione

$$\Lambda \bar{y} = b(x).$$

Tale condizione non è sufficiente per determinare le n funzioni $c_i(x)$, i=1,2,...,n.
Ricerchiamo quindi n-1 condizioni aggiuntive che ci permettano di determinare le funzioni c_i e, se possibile, che semplifichino i calcoli che dobbiamo affrontare.
Calcoliamo le derivate della funzione $\bar{y}$. Si ha:

$$\bar{y}'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x).$$

Come prima condizione aggiuntiva, per semplificare il calcolo delle derivate successive, imponiamo

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0.$$

Si avrà allora:

$$\bar{y}'(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x)$$

e quindi:

$$\bar{y}''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x).$$

Anche in questo caso imponiamo la condizione aggiuntiva:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0,$$

in modo che si abbia

$$\bar{y}''(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x)$$

Ripetiamo questo procedimento n-1 volte, ossia imponiamo l'annullamento della sommatoria contenente le derivate delle funzioni c_i in tutte le derivate, fino all'ordine n-1, della funzione $\bar{y}$.
Come conseguenza si avrà:

$$\bar{y}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(k)}(x)$$

per k=1,2,...,n-1 e

$$\bar{y}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n)}(x).$$

La condizione $\Lambda \bar{y} = b(x)$ diventa allora:

$$a_0\left(\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n)}(x)\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n-1)}(x)\right) + \ldots + a_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x)\right) + \\ + a_n\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)\right) = b(x),$$

Riordinando opportunamente i termini, il primo membro diventa:

$$a_0\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + a_0\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n)}(x)\right) + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n-1)}(x)\right) + \ldots + a_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x)\right) + \\ + a_n\left(\sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)\right) =$$

$$= a_0\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\left(a_0 y_i^{(n)}(x) + a_1 y_i^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1} y_i'(x) + a_n y_i(x)\right) =$$

$$= a_0\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i(x) \Lambda y_i(x) = a_0\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x)$$

(ricordiamo infatti che $y_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,n$ sono soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea).
Riunendo in un unico sistema tutte le condizioni che abbiamo imposto sulle funzioni $c_i(x)$, si ha:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(k)}(x) = 0 \qquad \mathrm{k = 0,1,...,n-2} \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)}(x) = b(x) \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema, scritto nelle incognite $c_i'(x)$, i=1,2,...,n, coincide con la matrice wronskiana delle soluzioni dell'equazione omogenea e quindi ha determinante non nullo. Esiste allora una ed una sola soluzione al sistema e da questa, integrando, si ottengono le funzioni incognite $c_i(x)$, i=1,2,...,n.

In alcuni casi particolari si può trovare un integrale particolare dell'equazione non omogenea in modo più facile.
Segnaliamo quelli più semplici e più frequenti.

1. Se la funzione b(x) è un polinomio di grado n, la ricerca dell'integrale particolare può essere effettuata nella classe dei polinomi di grado non inferiore ad n.
Se ad esempio dobbiamo trovare l'integrale generale dell'equazione:
1.1 $y''-y=x^2+1$
cercheremo un possibile integrale particolare della forma:
$\bar{y}(x)=ax^2+bx+c$.
Per determinare i coefficienti a, b, c, sostituiamo la $\bar{y}$ e le sue derivate nell'equazione differenziale.
Si ha $\bar{y}'(x)=2ax+b$; $\bar{y}''(x)=2a$.
L'equazione diventa allora:
$2a-(ax^2+bx+c)= x^2+1$,
ossia
$(a+1)x^2+bx+c-2a+1=0$
e, perchè si possa pensare che $\bar{y}$ sia soluzione dell'equazione differenziale su un intervallo (anzi sull'intero asse reale), questa uguaglianza deve essere vera per ogni x, ossia la funzione al primo membro deve essere identicamente nulla. Questo è possibile se e solo se i coefficienti del polinomio sono tutti nulli, ossia se
a=-1
b=0
c-2a+1=0, ossia c+3=0, ossia c=-3.
La funzione $\bar{y}=- x^2-3$ è quindi un integrale particolare dell'equazione differenziale assegnata.
Per trovare l'integrale generale, risolviamo anche l'equazione omogenea associata:
$y''-y=0$.
L'equazione caratteristica è
$\alpha^2 - 1 = 0$.
Le sue soluzioni $\alpha = \pm 1$ ci portano a determinare due integrali $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$.
L'integrale generale dell'equazione assegnata è dunque
$y=c_1e^x + c_2e^{-x} - x^2 - 3$.

Se invece consideriamo l'equazione
$y''-2y'=x+1$,

la ricerca di un integrale particolare nella classe dei polinomi di primo grado potrebbe non portare ad una soluzione; prima di spiegarci il perchè di questa possibilità, verifichiamolo sull'esempio considerato.
Proviamo a cercare i coefficienti a, b di un polinomio di primo grado

$\bar{y}(x)=ax+b$

che sia soluzione dell'equazione proposta.
Le sue derivate prima e seconda sono:

$\bar{y}'(x)=a$; $\bar{y}''(x)=0$.

Sostituite nell'equazione differenziale, esse danno luogo alla relazione

$0-2a=x+1$

che non è verificata dai punti di alcun intervallo dell'asse reale.
Quello che differenzia i due esempi considerati è il fatto che nel primo esempio la funzione incognita y compare, mentre così non è nel secondo esempio. Per ottenere un polinomio di primo grado dall'espressione y''-2y' è necessario operare almeno su un polinomio di secondo grado (ricordiamo che, derivando un polinomio, si ottiene un polinomio con grado diminuito di 1).
Nel secondo esempio considerato era quindi opportuno provare a cercare l'integrale particolare dell'equazione non omogenea a partire da polinomio di grado non inferiore a 2.
Vediamo se in questo caso è possibile trovare una soluzione. Supponiamo che sia

$\bar{y}(x)=ax^2+bx+c$.

Si ha $\bar{y}'(x)=2ax+b$; $\bar{y}''(x)=2a$. Sostituiamo nell'equazione differenziale ed otteniamo:

$2a-2(2ax+b)=x+1$, ossia
$(4a+1)x+2b-2a+1=0$,

verificata da tutti i punti dell'asse reale pur di porre

$4a+1=0$, da cui $a=-1/4$
$2b-2a+1=0$, da cui $b=-3/4$

Abbiamo trovato che la funzione

$\bar{y}(x)= -x^2/4-3x/4+c$

è integrale particolare dell'equazione assegnata per ogni valore della costante c (sulla quale non abbiamo trovato condizioni).
Dal momento che ci basta trovare un solo integrale particolare, scegliamo, ad esempio, quello per il quale è c=0.
Risolvendo l'equazione omogenea associata, la cui equazione caratteristica è

$\alpha^2 - 2\alpha = 0$,

si trovano le soluzioni $\alpha = 0$, $\alpha = 2$; da esse si ricavano due soluzioni dell'equazione omogenea

$y_1 = e^{0x} = 1$; $y_2 = e^{2x}$

e l'integrale generale dell'equazione non omogenea

$y= c_1 + c_2e^{2x} - x^2 / 4 - 3x / 4$.

2. Un'altra situazione interessante è il caso in cui sia

$b(x)= e^{\beta x}$.

Sarà necessario distinguere due casi:

a) β non è soluzione dell'equazione caratteristica

In questo caso si può effettuare la ricerca di un integrale particolare dell'equazione non omogenea tra le funzioni della forma

$\bar{y}(x)=a\,e^{\beta x}$.

Se ad esempio consideriamo l'equazione differenziale

$y''-2y'=e^{3x}$,

cercheremo il coefficiente a per il quale la funzione $\bar{y}(x)=ae^{3x}$ risolve l'equazione differenziale assegnata. Ne calcoliamo le derivate $\bar{y}'(x)=3ae^{3x}$; $\bar{y}''(x)=9ae^{3x}$ e le sostituiamo nell'equazione, ottenendo:

$9ae^{3x}-6ae^{3x}=e^{3x}$,

dalla quale si ottiene 3a=1, ossia a=1/3.

L'integrale particolare cercato è dunque $\bar{y}(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$. L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è stato calcolato precedentemente. Questo ci consente di dire che l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x)=c_1+c_2e^{2x}+\frac{e^{3x}}{3}$$

b) β è soluzione dell'equazione caratteristica

In questo caso un procedimento come quello sopra seguito non porterebbe alla determinazione di un integrale particolare dell'equazione non omogenea in quanto y= ae^{3x} è soluzione dell'equazione omogenea.

Si ricorre allora ad una soluzione particolare del tipo

$\bar{y}(x)=axe^{3x}$,

come se si fosse in presenza di radici dell'equazione caratteristica di molteplicità k>1.

Se ad esempio consideriamo l'equazione differenziale

$y''-3y=e^{3x}$,

nella quale le radici dell'equazione caratteristica sono $\alpha=0,\ \alpha=3$, siamo nella situazione di cui ci vogliamo occupare.

Le derivate saranno: $\bar{y}'(x)=a(1+3x)e^{3x}$; $\bar{y}''(x)=a(6+9x)e^{3x}$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene:

$a(6+9x)e^{3x}-3a(1+3x)e^{3x}=e^{3x}$, ossia

$3ae^{3x}=e^{3x}$,

verificata da tutti i punti dell'asse reale pur di porre:

3a=1, osia a=1/3.

Perciò la funzione

$$\bar{y}(x)=\frac{1}{3}xe^{3x}$$

è un integrale particolare dell'equazione non omogenea, mentre il suo integrale generale è

$$y(x)=c_1+c_2e^{3x}+\frac{1}{3}xe^{3x}.$$

3. Ultimo caso che desideriamo segnalare è quello in cui la funzione b(x) sia una combinazione lineare di funzioni seno e coseno (eventualmente con un coefficiente nullo), come nell'equazione differenziale

$y''-3y'=2\sin x$.

In tutti questi casi (quindi anche se al secondo membro compare solo il seno o solo il coseno) si cercherà un integrale particolare dell'equazione non omogenea tra le funzioni della forma

$\bar{y}(x) = a sinx + b\cos x$.

Effettuiamo la ricerca per l'equazione proposta.

Le derivate sono $\bar{y}'(x) = a\cos x - bsinx$; $\bar{y}'' = -asinx - b\cos x$.

Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene:

$-asinx - b\cos x - 3asinx + 3b\cos x = 2sinx$, ossia

$2b\cos x - 4asinx = 2sinx$,

verificata in tutti i punti dell'asse reale pur di porre

b=0

-4a=2 , da cui a=-1/2.

L'integrale particolare cercato è

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{2}sinx$$

e l'integrale generale (l'equazione omogenea associata è già stata risolta precedentemente) è:

$$y(x)= c_1 + c_2e^{3x} - \frac{1}{2}sinx.$$

Proviamo infine a determinare, con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, un integrale particolare dell'equazione

y''-y=x^2+1,

risolta nell'esempio 1.1.

Abbiamo già visto che le funzioni $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea associata. Cerchiamo quindi una funzione della forma

$$\bar{y}(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x}.$$

Le derivate, tenendo conto delle condizioni espresse nella descrizione del metodo, sono:

$$\bar{y}'(x) = c_1(x)e^x - c_2(x)e^{-x},$$

$$\bar{y}''(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{-x} + c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x}$$

Il sistema che otteniamo in questo semplice caso (n=2) è:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{-x} = 0 \\ c_1'(x)e^x - c_2'(x)e^{-x} = x^2 + 1 \end{cases}.$$

Se ne deduce:

$$\begin{cases} c_1'(x) = -c_2'(x)e^{-2x} \\ -2c_2'(x)e^{-x} = x^2 + 1 \end{cases}, \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{e^{-x}}{2}(x^2+1) \\ c_2'(x) = -\dfrac{e^{x}}{2}(x^2+1) \end{cases}.$$

Integrando (per parti) e scegliendo la costante di integrazione nulla, si ottiene:

$$\begin{cases} c_1(x) = -\frac{1}{2}e^{-x}\left(x^2 + 2x + 3\right) \\ c_2(x) = -\frac{1}{2}e^{x}\left(x^2 - 2x + 3\right) \end{cases},$$

da cui:

$$\bar{y} = -\frac{1}{2}e^{-x}\left(x^2 + 2x + 3\right)e^{x} - \frac{1}{2}e^{x}\left(x^2 - 2x + 3\right)e^{-x} =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(2x^2 + 6\right) = -x^2 - 3$$

L'integrale generale è allora:

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} - x^2 - 3,$$

come già trovato per altra via.