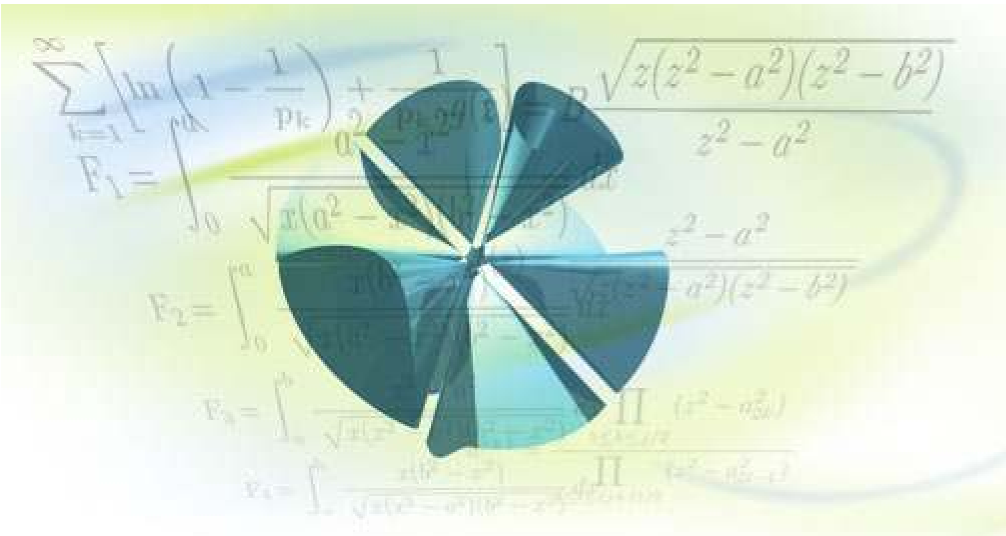
Appunti e generalità sulle funzioni reali di variabili reali.

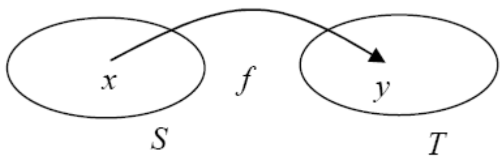
Premessa

Questa breve trattazione non vuole costituire una guida completa ed esauriente sull'argomento, ma vuole fornire solamente i concetti fondamentali necessari per il raggiungimento degli obiettivi del programma di matematica applicata della quarta Igea.



Definizione di funzione

Siano S e T due insiemi. Si dice che in S è definita una **funzione a valori in T** se è fissata una legge che **ad ogni** elemento di S fa corrispondere uno ed un solo elemento di T.



$f: S \to T$

$x \in S$ si chiama *variabile indipendente*,

$y \in T$ si chiama *variabile dipendente*.

$\forall\, x \in S : y = f(x) \in T$

La corrispondenza tra S e T avviene nel senso della freccia.

Esempio.

Sia $S \equiv \mathsf{Z}$ e $T \equiv \mathsf{N}$

Sia $f: \mathsf{Z} \to \mathsf{N}$ così definita: $y = f(x) = x^2 + 1$ con $x \in \mathsf{Z}$ e $y = f(x) \in \mathsf{N}$.

L'insieme S si chiama anche **insieme di definizione** o **dominio.**
L'insieme T si chiama **insieme di arrivo**.
Codominio della funzione f è l'insieme di tutti gli elementi trasformati (immagine) di S tramite f:

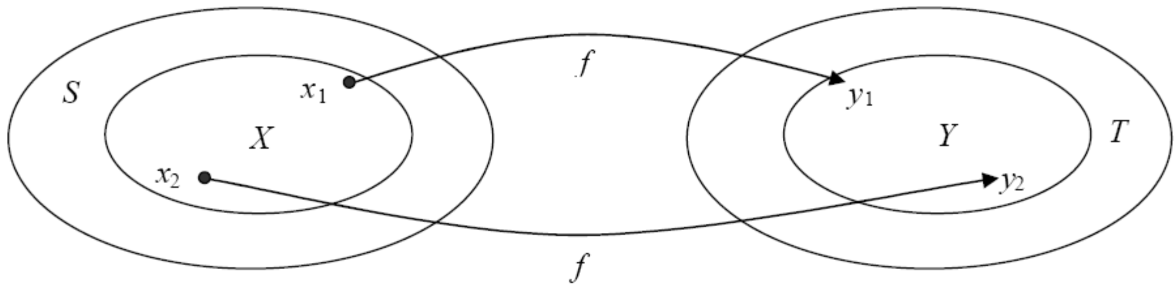
$$\mathrm{Im}\, f : \{\, y \in T \mid \exists\, x \in S \to y = f(x) \,\}$$

Grafico di una funzione

Sia $f: S \to T$, si chiama **grafico** della funzione f il sottoinsieme G costituito da tutte le coppie $(x, y = f(x))$ con $x \in S$ e $y \in T$. In generale è:

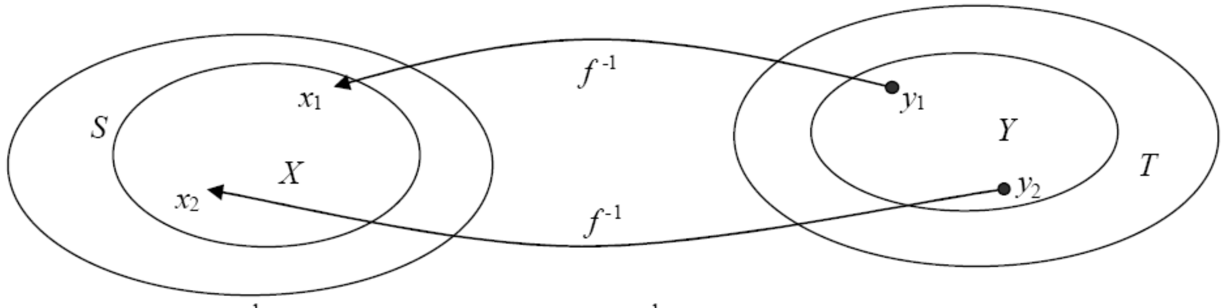
$$G \subset S \times T$$

Sia X un insieme e $f: S \to T$ una funzione, sia $X \subset S$. Si chiama **immagine** di X mediante f il sottoinsieme di T costituito da tutti gli elementi che sono immagini di elementi di X.



Sia $f: S \to T$ e Y un sottoinsieme di T ($Y \subset T$), si chiama **controimmagine** di Y il sottoinsieme di S costituito dagli elementi x che hanno un'immagine appartenente ad Y.

$$f^{-1}(Y) : \{\, x \in S \mid y = f(x) \in Y \}$$



$y_1 = f(x_1) \;\Rightarrow\; x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $y_2 = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_2 = f^{-1}(y_2)$

Funzioni injettive, surjettive, bijettive

Funzione surjettiva

$f : S \to T$ si dice **surjettiva** se $f(S) \equiv T$.

Funzione injettiva

Una funzione $f: S \to T$ si dice **injettiva** se **comunque** scelti $x_1 \neq x_2 \in S$, si ha: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Funzione bijettiva

Una funzione si dice **bijettiva** se è contemporaneamente injettiva e surjettiva.

Esempio 1 – Sia $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ così definita: $y = f(x) = x$
Tale funzione è surjettiva ed anche injettiva. Per brevità tale caratteristica la diremo **bijettiva** (contemporaneamente surjettiva e injettiva)

Esempio 2 – Sia $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ così definita: $y = f(x) = x^2 - x$
Stabilire se tale funzione è injettiva.
La risposta è ovviamente negativa poiché, presi i due elementi 0 e 1 $\in \mathrm{R}$ (dominio), essendo $0 \neq 1$, si ha: $f(0) = 0^2 - 0 = 0$ e $f(1) = 1^2 - 1 = 0$. Quindi abbiamo che ad elementi distinti del **dominio**, corrisponde un unico elemento $0 \in \mathrm{R}$ del **codominio**.

Esercizi
Sia $f: \mathrm{N} \to \mathrm{Z}$ così definita: $f(x) = x^2 +1$. Stabilire se tale funzione è injettiva.
Sia $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}^+$ così definita: $f(x) = |x|$. Stabilire se tale funzione è injettiva o sujettiva.

Funzioni pari, funzioni dispari

Siano $S, T \subset \mathrm{R}$

- **Funzione pari** (simmetrica)

  Sia $f: S \to T$, si dice che f è **pari** se $\forall\ x \in S \Rightarrow f(x) = f(-x)$

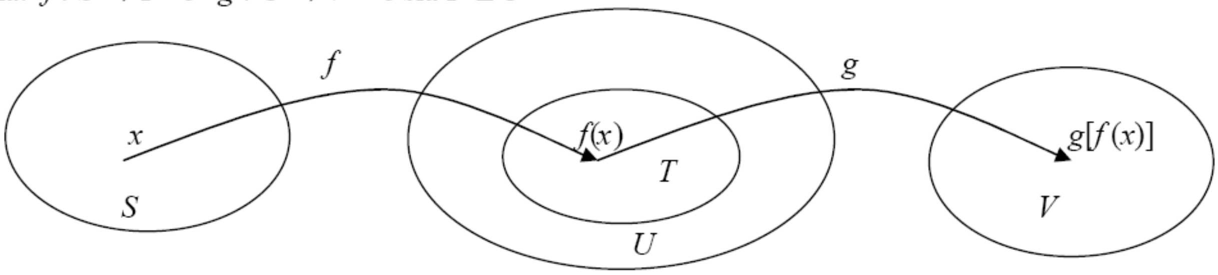
- **Funzione dispari** (antisimmetrica)

  Sia $f: S \to T$, si dice che f è **dispari** se $\forall\ x \in S \Rightarrow f(x) = -f(-x)$

Esempi
$f : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ tale che $y = x^2$ è una funzione pari.
$f : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ tale che $f(x) = x^3$ è dispari poiché $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

Funzioni composte

Sia: $f: S \rightarrow T$ e $g: U \rightarrow V$ e sia $T \subset U$



Sia $x \in S$ allora $f(x) \in T \subset U$
Ha senso considerare la quantità $g[f(x)]$ ossia l'immagine di $f(x)$ tramite la g, e $g[f(x)] \in V$ e $g \circ f$ si chiama **funzione composta**.
In tale definizione è essenziale che l'immagine di f sia contenuta nel dominio di g.

La legge di composizione, in generale, **non è commutativa**, ossia:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Se è: $f: S \rightarrow S$ e $g: S \rightarrow S$ $g: S \rightarrow S$ ha senso considerare $g \circ f$ e $f \circ g$, ma anche in questa situazione la proprietà non è commutativa.
Basta considerare il seguente esempio:
$f: \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$ $f(x) = x^2 + 1$ e $g: \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$ $g(x) = 3x$

$g \circ f(x) = g[f(x)] = 3(x^2 + 1) = 3x^2 + 3$
$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(3x) = (3x)^2 + 1 = 9x^2 + 1$

Da cui, in generale:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Classificazione delle funzioni

FUNZIONE RAZIONALE	FUNZIONE IRRAZIONALE	FUNZIONE TRASCENDENTE
intera: se è del tipo *f*(*x*)=P(*x*) dove P(*x*) e' un polinomio nella variabile *x* fratta: se è del tipo *f*(*x*)=[P(*x*)/Q(*x*)] dove P(*x*) e Q(*x*) sono 2 polinomi nella variabile *x*	intera: se è del tipo *f*(*x*)=$\sqrt[n]{P(X)}$ fratta: se è del tipo *f*(*x*)=$\sqrt[n]{\frac{P(x)}{Q(x)}}$	esponenziale: se è del tipo *f*(*x*) = *g*(*x*)h(x) con *g*(*x*), *h*(*x*) funzioni nella variabile *x* logaritmica: se è del tipo *f*(*x*) = log *f*(*x*) trigonometrica: se è del tipo sen (*f*(*x*)) , cos (*f*(*x*)), tg (*f*(*x*)), .. Frequentemente si troverà una funzione trascendente che sarà combinazione di quelle sopra

Dominio
(Campo di esistenza *Df*).

Per ricercare il dominio della funzione *f*(x) bisogna prima classificare la funzione stessa e in base alle sue caratteristiche ricercare il campo di esistenza.
Bisogna vedere dove esiste la funzione considerata, porre quindi le Condizioni di Esistenza denominate C.E.

-se la *f* è razionale intera il suo dominio *Df* risulta dato da ogni valore della x appartenente al campo reale: ***Df*** = ℝ
-se c'è un denominatore bisogna porre che la *x* deve essere diversa dagli zeri di quel denominatore: ***Df*** = {xÎℝ, denominatore ¹ 0}
-se c'è una radice pari bisogna porre il radicando positivo (se è dispari non ci sono problemi): ***Df*** = {xÎℝ, radicando ≥0}
-se c'è un logaritmo bisogna porre il suo argomento positivo: ***Df*** = {xÎℝ, (argomento del logaritmo) >0}
-se c'è una funzione trascendente esponenziale: *f*(x)*g*(*x*) occorre porre *f*(x)>0 (e discutere nuovamente *g*(x)).

Esempi sul dominio
Vediamo alcuni esempi per calcolare il dominio di una funzione:
1) La funzione $y = 3x$^3-2x+1 è definita su tutto l'asse reale $\mathbb{R}$

2) La funzione $y = \frac{3x+5}{x+2}$ è definita per ogni x Î$\mathbb{R}$-{-2}, infatti il quoziente che figura nella funzione è calcolabile per ogni xÎ$\mathbb{R}$ eccetto x=-2 in cui l'espressione ha denominatore nullo.

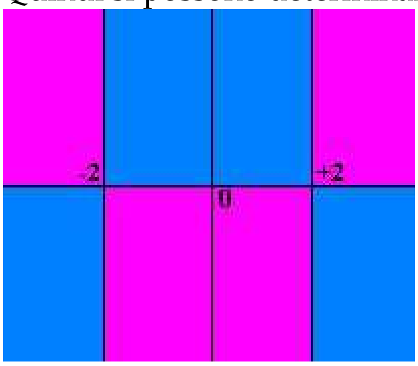
3) La funzione $y = x$log(x+4) è definita per via del logaritmo solo se x+4>0 quindi *Df* =]-4,+∞[

Segno della funzione
Studiare il segno della funzione significa determinare in quali intervalli il suo grafico è situato al di sopra o al di sotto dell'asse delle x.
É possibile così delimitare la parte di piano entro la quale disegnare la funzione.

Funzione positiva/negativa
Data la funzione $y = f(x)$, semplicemente si pone $y > 0$ e di conseguenza si avrà la disequazione: $f(x) > 0$.
Risolta tale disequazione si ottengono gli intervalli della x in cui la funzione è positiva e nello stesso tempo gli intervalli in cui la funzione è negativa.

Esempio sulla determinazione del segno

Consideriamo la funzione $y = x$^2-4 , ponendo x^2-4 > 0 , consideriamo l'equazione associata x^2-4=0 che ha soluzioni x=+2 e x=-2 .
Avendo due soluzioni reali e distinte dell'equazione, la disequazione sarà verificata per valori esterni alle radici cioè nell'insieme:
]-∞,-2] $\cup$ [+2,+∞[.
Quindi si possono determinare le aree in cui si troverà il grafico della funzione.



Le aree in blu indicano dove non passa il grafico della funzione, mentre in fuxia dove esso si trova.

Intersezione con gli assi
Si tratta di calcolare le coordinate dei punti in cui la funzione incontra gli assi coordinati: per far ciò si risolvono i seguenti sistemi.

Con l'asse delle *x*	$\begin{cases} y = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$	➡	$f(x) = 0$
Con l'asse delle *y*	$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases}$	➡	$y = f(0)$

Esempio

1) Considero la funzione $y = x^2-4$
Cerco le intersezioni con gli assi.
Risolvo il sistema tra la funzione e l'asse dele x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Ho due punti di intersezione con l'asse delle x: A(-2,0) B(2,0)

Risolvo ora il sistema tra la funzione e l'asse delle y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse delle y è C(0,-4). **2)** Considero la funzione $y = x^2+x-2$
Cerco le intersezioni con gli assi.
Risolvo il sistema tra la funzione e l'asse dele x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 + x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ho due punti di intersezione con l'asse delle x: A(1,0) B(-2,0)

Risolvo ora il sistema tra la funzione e l'asse delle y:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 + x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Il punto di intersezione con l'asse delle y è C(0,-2).