Il calcolo delle probabilità

Cenni storici

Come in molti altri casi, anche l'individuazione di una data precisa per la collocazione della nascita della teoria della probabilità non ha soluzione univoca. Tuttavia, una delle date fondamentali in questo senso è il 1654.

Nel 1654 una disputa tra giocatori d'azzardo portò due famosi matematici francesi, Blaise Pascal e Pierre de Fermat, ad una prima e parziale formulazione di una teoria matematica della probabilità.

Antoine Gombaud, un nobile francese con l'hobby di problemi inerenti il gioco d'azzardo, richiamò all'attenzione di Pascal un'apparente contraddizione che concerneva un famoso gioco di dadi. Il gioco consisteva nel lanciare un paio di dadi 24 volte; il problema consisteva nel decidere se scommettere o no la stessa quantità di denaro sulla possibilità che si verificasse almeno un "doppio 6" nell'arco di 24 lanci. Una apparentemente ben dimostrata regola del gioco d'azzardo spinse a credere che scommettere un "doppio 6" su 24 lanci sarebbe stato vantaggioso, ma i suoi stessi calcoli indicavano esattamente il contrario.

Questo ed altri problemi portarono Pascal e Fermat ad uno scambio epistolare, nel quale i principi fondamentali della teoria della probabilità venivano formulati per la prima volta. Anche se alcuni problemi speciali sui giochi aleatori erano stati risolti da matematici italiani nel XV e nel XVI secolo, non venne sviluppata alcuna teoria generale prima di questa famosa corrispondenza.

Lo scienziato olandese Christian Huygens, un insegnante di Leibnitz, venne a conoscenza di questa corrispondenza e dopo pochi anni (1657) pubblicò il primo libro sulla probabilità, intitolato *De ratiociniis in ludo aleae*. Era un trattato su problemi associati al gioco d'azzardo. A causa dell'inerente attrattiva dei giochi aleatori, la teoria della probabilità divenne presto famosa e si sviluppò rapidamente durante il XVIII secolo. Coloro che diedero maggiormente un contributo alla teoria della probabilità in questo periodo furono Jakob Bernoulli (1654-1705) e Abraham DeMoivre (1667-1754).

Nel 1812 Pierre de Laplace (1749-1827) introdusse una grande quantità di nuove idee e tecniche matematiche nel suo libro *Theorie Analytique des Probabilites*. Prima di Laplace, la teoria della probabilità concerneva solamente lo sviluppo di un'analisi matematica dei giochi aleatori. Laplace applicò idee probabilistiche a molti problemi scientifici e pratici. La teoria degli errori, la matematica attuariale e la meccanica statistica sono esempi di alcune delle importanti applicazioni della teoria della probabilità sviluppate nel XIX secolo.

In quelli stessi anni, Gauss, con il contributo dello stesso Laplace, dava una formulazione della distribuzione normale, conosciuta anche come "distribuzione di Gauss-Laplace", che costituisce uno dei cardini su cui si fonda la statistica moderna.

Come tante altre branche della matematica, lo sviluppo della teoria della probabilità è stato stimolato dalla varietà delle sue applicazioni. Di converso, ogni progresso ha ampliato la portata dell'influenza della teoria della probabilità. La statistica matematica è un'importante branca della probabilità applicata; altre applicazioni si trovano in svariati campi, come ad esempio genetica, psicologia, economia ed ingegneria. Dai tempi di Laplace, molti lavoratori hanno contribuito alla teoria della probabilità: tra i più importanti troviamo Chebyshev, Markov, von Mises, e Kolmogorov.

Una delle difficoltà nello sviluppo di una teoria matematica della probabilità è stata il raggiungere una definizione di probabilità che fosse abbastanza rigorosa e precisa per l'utilizzo in matematica, ma che, al tempo stesso, fosse sufficientemente flessibile per l'applicazione in un ampio raggio di fenomeni. La ricerca di una definizione accettabile richiese quasi tre secoli e fu segnata da molte controversie. Il problema fu finalmente risolto nel XX secolo dalla trattazione di una teoria della probabilità su base assiomatica. Nel 1933, con una monografia intitolata *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (*Fondamenti della teoria della probabilità*), un matematico russo di nome A. N. Kolmogorov tracciò un approccio assiomatico per la teoria moderna. Da allora, queste idee sono state alquanto rifinite e la teoria della probabilità ora è parte di una più generale disciplina, conosciuta col nome di teoria della misura.

Pietre miliari nella storia della teoria della probabilità

1494 - Pacioli - *Summa* - Stampata la prima questione sulla probabilità.

1550 - Cardano - *Liber de ludo aleae*.

1654 - Pascal e Fermat - Scambio epistolare nel quale vennero fondati e dimostrati i principi basilari della teoria della probabilità.

1657 - Huygens - *De ratiociniis in ludo aleae* - Primo libro a stampa sulla probabilità (basato sul lavoro di Pascal e Fermat).

1662 - Graunt - *Osservazioni sui conti della mortalità* - Probabilità per gli affari delle assicurazioni: l'inizio della statistica matematica.

1713 - Jakob Bernoulli - *Ars conjectandi* - Il primo grande lavoro sulla probabilità (contiene i risultati di combinazioni e permutazioni che oggi sono considerati basilari): la prima prova corretta del teorema binomiale per esponenti naturali; la legge dei grandi numeri (il primo teorema limite nella probabilità).

1713 - DeMoivre - Dottrina della probabilità.

1770 ca - LaPlace - *Teoria analitica della probabilità* - Ha esteso la teoria matematica della probabilità ad aree ben oltre il campo dei giochi aleatori.

1933 - Kolmogorov - *Fondamenti della teoria della probabilità* - Ha tracciato un approccio assiomatico per la moderna teoria della probabilità, compiendo una rivoluzione nell'approccio alla materia.

Alcuni concetti primitivi della probabilità

Si introducono i Concetti Primitivi e la loro reciproca relazione:

"*la Prova genera l'Evento con una certa Probabilità*"

Prova: è un esperimento soggetto a incertezza e può suddividersi in sottoprove.

Evento: è uno dei possibili risultati della prova e costituisce un insieme di descrizioni circa i possibili risultati dell'esperimento.

L'insieme di tutti i risultati possibili di una prova prende il nome di **Spazio Campionario** e si indica con il simbolo Ω.

Tipologia e algebra degli eventi

Tipologia di eventi:

- **Eventi compatibili**: si dicono compatibili due eventi che possono verificarsi contemporaneamente.
- **Eventi equiprobabili**: sono eventi che hanno pari probabilità di verificarsi.

Algebra degli eventi:

- **Unione (o *somma logica*) di due eventi A e B** (simbolo U): è l'evento "si verifica A oppure B oppure entrambi"
- **Intersezione (o *prodotto logico*) di due eventi A e B** (simbolo ∩): è l'evento "si verificano A e B contemporaneamente"
- **Negazione di un evento A**: è quell'evento che si verifica allorché non si verifica A

Introduzione alla probabilità

La **Probabilità** è un concetto che viene usato in molte discipline e che è ormai entrato a far parte del linguaggio corrente in quanto usualmente si devono prendere decisioni che, anche dopo aver esaminato le informazioni disponibili, vengono maturate in condizioni di incertezza.

Nonostante ciò è difficile dare un'interpretazione, e quindi una definizione, di probabilità che sia completamente soddisfacente ed esente da critiche.

Infatti la probabilità è un **concetto primitivo**, cioè originario per l'essere umano perché innato e sempre presente nelle sue regole di comportamento.

Nel seguito si illustreranno le definizioni di probabilità storicamente fornite dalle diverse scuole di pensiero: la scuola classica, la scuola frequentista e la scuola soggettivista. Successivamente si tratterà poi la definizione assiomatica della probabilità.

Definizione classica della probabilità

Scuola classica
La probabilità è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi di un risultato e il numero totale dei possibili risultati, ammesso che questi siano egualmente possibili.

Questa definizione presuppone:

- la **conoscenza di tutti i possibili casi che possano verificarsi, e che quindi il numero di questi casi sia finito**
- la **equiprobabilità di tutti i casi.**

Alcune osservazioni critiche:

- la definizione di probabilità si fonda sul concetto di equiprobabilità (presupponendo quindi la conoscenza del concetto di probabilità che invece si intende definire)
- essa trova applicazione solo in esperimenti noti nelle loro caratteristiche (casi noti e finiti, ecc.) e i cui eventi siano equiprobabili

Definizione frequentista della probabilità

Scuola Frequentista:
la probabilità è il limite della frequenza relativa di un evento ripetibile quando cresce, oltre ogni limite, il numero delle prove.

In altre parole la probabilità è pari alla frequenza relativa dei successi quando si ripete la prova all'infinito.

Questa definizione presuppone:

- la **ripetibilità della prova all'infinito nelle stesse condizioni**

Alcune osservazioni critiche:

- la prova non è sempre ripetibile per ragioni tecniche, economiche, ecc.

Definizione soggettivista della probabilità

Scuola Soggettivista:
la probabilità rappresenta il grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce al presentarsi di un evento, ovvero, per quantificare, come la somma p che è disposto a scommettere quando, verificandosi l'evento, vince 1.

Per individuo coerente (o razionale) si intende un individuo che, nell'ottica di poter vincere 1, è disposto a scommettere una somma p non superiore a 1. Inoltre egli scommetterà una cifra maggiore quanto più alta sarà la fiducia che l'evento si verifichi.

Alcune osservazioni critiche:

- Tale definizione comporta l'individuazione di una misura di probabilità che, data una stessa prova, muta al variare dell'individuo considerato.

Teoria assiomatica della probabilità

Lo studioso Kolmogorov propone una teoria della probabilità basata sulla individuazione di alcuni assiomi (o postulati) dai quali si dimostrano una serie di teoremi.

Un **assioma** è un'affermazione che non si dimostra in quanto principio di base universalmente accettato.

La teoria assiomatica si fonda su tre momenti fondamentali:

- l'**individuazione dei concetti primitivi** di prova, evento e spazio così come definiti in precedenza;
- l'**enunciazione degli assiomi** (o postulati) della probabilità;
- la **dimostrazione dei teoremi** mediante i postulati e con l'ausilio della logica e della matematica.

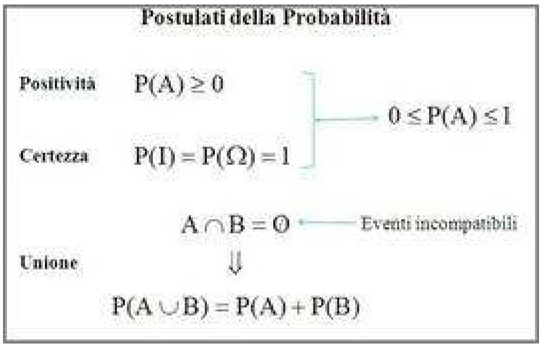
Postulati della probabilità

I) Positività:
La Probabilità di un evento A è un numero unico maggiore o uguale di 0: **$P(A) \geq 0$.**

II) Certezza:
La Probabilità dell'evento certo e quindi dello Spazio Campionario Ω è sempre 1:
$P(I)=P(\Omega)=1$.
(dove con "I" si indica un evento certo)

III) Unione:
Siano A e B due eventi incompatibili,
allora la probabilità della loro unione è la somma delle singole probabilità di A e B.

NB.
Dal primo e secondo assioma si deduce che la probabilità di un evento A è sempre compresa tra 0 e 1.

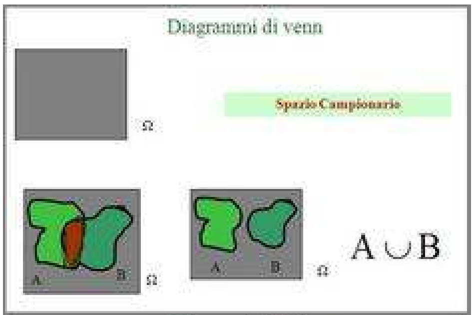


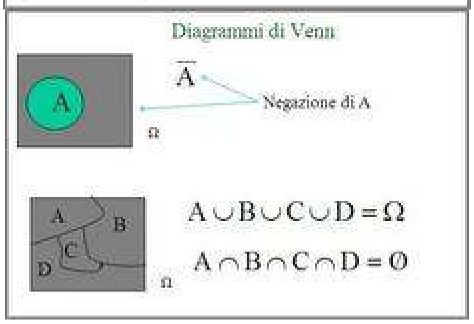
Diagrammi di Venn

Le relazioni dell'algebra degli eventi vengono illustrate su un piano mediante grafici caratteristici detti **Diagrammi di Venn**.

In questi diagrammi lo spazio campionario viene disegnato come un rettangolo all'interno del quale vengono posti insiemi chiusi che rappresentano gli eventi.

Non interessa l'esatto contorno, quanto piuttosto le mutue relazioni fra di essi e con lo spazio campionario.





Teoremi fondamentali della probabilità

I) Probabilità dell'evento impossibile
La probabilità dell'evento impossibile è pari a 0.

II) Probabilità dell'evento negazione
Dato un evento A, la probabilità dell'evento negazione di A è pari al complemento a 1 della probabilità di A.

III) Probabilità totali
Dati due eventi A e B, la probabilità dell'unione di A e B è pari alla somma delle singole probabilità dei due eventi meno la probabilità dell'intersezione.

Quest'ultimo teorema generalizza il concetto dell'unione per eventi compatibili.

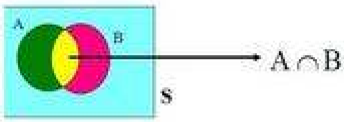
I Teoremi Fondamentali

1) $P(\emptyset) = 0$

2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Teorema delle Probabilità Totali

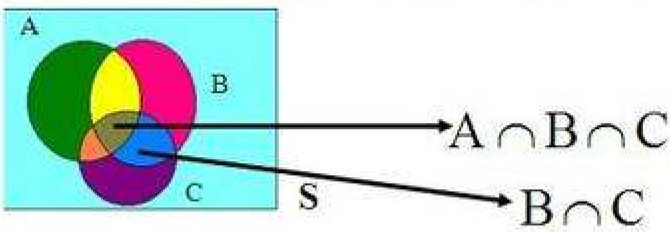
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Teorema delle probabilità totali per 3 eventi

Generalizzazione del teorema della probabilità totale al caso di 3 eventi

$$P(A \cup B \cup C) =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) -$$
$$- P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



Probabilità condizionata

Si definisce **probabilità condizionata** la probabilità di un evento B condizionata al verificarsi di un evento A.

P(B|A) *"Probabilità dell'evento B dato che si è verificato l'evento A"*

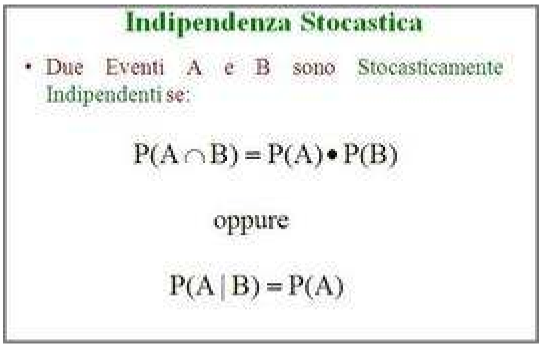
Teorema della probabilità condizionata
La probabilità condizionata dell'evento B dato A è pari **al rapporto tra la probabilità dell'intersezione di A e B e la probabilità dell'evento A.**

Indipendenza stocastica

Due eventi A e B si dicono **stocasticamente indipendenti** quando il verificarsi dell'uno non modifica la probabilità del verificarsi dell'altro evento.

Formalmente si definiscono indipendenti due eventi per cui:

*P(A intersezione B)=P(A)*P(B);*
oppure
P(B|A)=P(B);



Teorema di Bayes

Il **teorema di Bayes**, proposto da Thomas Bayes nel 1763, deriva da due teoremi fondamentali quello delle probabilità condizionate e quello delle probabilità totali.

Il teorema, in presenza di una serie di eventi H_i ognuno caratterizzato da una probabilità (prob. a priori) e di evento E incluso nello spazio degli H_i (condizionato dagli eventi H_i con diverse probabilità, le **verosimiglianze**), consente di pervenire al calcolo delle probabilità a posteriori attraverso una particolare interpretazione del ruolo giocato dalle verosimiglianze e dalle prob. a priori.

In tempi recenti, grazie alla scuola soggettivista, si è sviluppato un importante filone della teoria delle decisioni che prende il nome di **statistica bayesiana**.

Per illustrare il teorema nel seguito si presenta un tipico esempio in cui trova applicazione la **filosofia bayesiana**.