LE VARIABILI CASUALI

In molti fenomeni aleatori il risultato di un esperimento è una grandezza che assume valori in modo casuale. Pensa ad esempio al numero di auto che si presentano ad un casello autostradale in un dato intervallo di tempo, al numero "X" nella schedina del totocalcio, al guadagno che un giocatore può realizzare in un certo numero n di partite. Come sappiamo, in una data prova non si può conoscere quale valore assumerà la nostra variabile casuale; ma se conosciamo tutti i possibili valori che la nostra variabile può assumere e le loro rispettive probabilità di presentarsi, allora possiamo dire di conoscere la variabile aleatoria (=casuale)!
Vediamo ora qualche definizione:

VARIABILE CASUALE. *Si definisce variabile casuale una funzione dello spazio Ω degli eventi che ad ogni evento, appartenente ad una partizione di Ω, associa uno e un solo numero reale.*

Una variabile casuale si dice:

- DISCRETA se può assumere un numero finito o un'infinità numerabile di valori;
- CONTINUA se può assumere tutti i valori di un intervallo limitato o illimitato.

Notazione: solitamente si indicano con la lettera maiuscola (X,Y,…) le variabili casuali e con la minuscola i valori che esse assumono (x_i,y_i,…). Tali valori x_i,y_i,… vengono chiamati anche "determinazioni" o "realizzazioni" della variabile.
N.B. Usiamo indifferentemente come sinonimi "variabile casuale" e "variabile aleatoria"!
La nostra trattazione d'ora in poi riguarderà soltanto le variabili casuali discrete.

VARIABILI CASUALI DISCRETE

Ad ogni valore x_i si fa corrispondere il valore p_i della probabilità dell'evento al quale x_i è associato:

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ. *Si definisce distribuzione di probabilità della variabile casuale discreta X, l'insieme dei valori x_i e dei valori p_i ad essi associati.*
La distribuzione di probabilità può essere rappresentata con una tabella e con un grafico (diagramma a bastoncini).

N.B. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ *poiché gli eventi costituiscono una partizione di* Ω.

FUNZIONE DI RIPARTIZIONE: *Si chiama funzione di ripartizione di probabilità della variabile casuale X una funzione F(x) che è uguale, per ogni valore della x, alla probabilità che X assuma un valore minore o uguale a x, cioè:*

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Ovvero:
per $x < x_1$ *si ha* $F(x)=0$
per $x_1 \leq x < x_2$ *si ha* $F(x)=p_1$
per $x_1 \leq x < x_2$ *si ha* $F(x)=p_1+p_2$

………………………………………………………
per $x \geq x_n$ *si ha* $F(x)=p_1+p_2+\ldots\ldots\ldots\ldots+p_n=1$

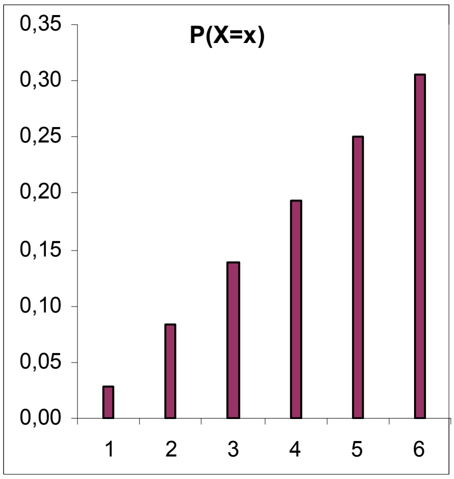
N.B. $P(x_k < x \leq x_j) = F(x_j) - F(x_k)$

Ora che abbiamo messo tanta carne al fuoco, vediamo un semplice esempio.

ESEMPIO. Nell'esperimento del lancio di due dadi si consideri la variabile casuale X che assegna a ciascun lancio il massimo fra i valori delle due facce.

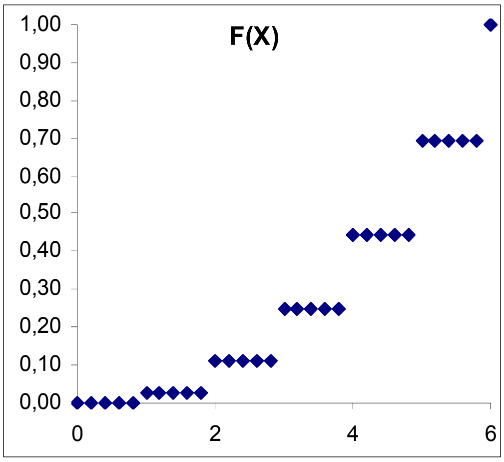
FUNZIONE DI PROBABILITÀ

X	P(X=x)
1	1/36
2	3/36
3	5/36
4	7/36
5	9/36
6	11/36
	1



FUNZIONE DI RIPARTIZIONE

X	F(X)
1	1/36
2	4/36
3	9/36
4	16/36
5	25/36
6	36/36



VALORI DI SINTESI DELLE VARIABILI CASUALI DISCRETE

- *MODA*

  Si definisce moda di una variabile casuale discreta X quel valore di X per cui è massima la funzione di probabilità.

- *MEDIANA*

  La mediana di una variabile casuale discreta X è quel valore x_m di X tale che:
  $F(X_m) = P(X \le x_m) = 0,5$
  In modo analogo può essere ricavato qualsiasi percentile x_p di X. Ad esempio, il 25 percentile (detto PRIMO QUARTILE) di X sarà quel valore $x_{0.25}$ di X tale che:
  $F(X_{0,25}) = P(X \le x_{0,25}) = 0,25$

- *VALOR MEDIO (detto anche VALORE ATTESO o SPERANZA MATEMATICA)*

  Sia X una variabile casuale discreta avente la seguente distribuzione di probabilità:

X	P(X=x)
x_1	p_1
x_2	p_2
…….	…….
…….	…….
…….	…….
x_i	P_i
…...	…….
…….	…….
x_n	p_n
	1

Si definisce valore medio (o valore atteso, o speranza matematica) di X:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_i p_i + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Il valore medio di una variabile casuale discreta è dunque la media aritmetica ponderata dei suoi valori pesati per le rispettive probabilità.
Vediamo ora brevemente alcune proprietà del valor medio:

PROPRIETÀ I
Se a è una costante reale, allora: $M(aX) = aM(X)$

PROPRIETÀ II
Se a e b sono costanti reali, allora: $M(aX + b) = aM(X) + b$

PROPRIETÀ III
Il valore atteso della somma di due variabili casuali X e Y è uguale alla somma dei valori attesi delle singole variabili: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$

Dalle proprietà I e III: se $a, b \in \Re$ e X e Y sono due variabili casuali, allora

$M(aX+bY)=aM(X)+bM(Y)$

- *SCARTO QUADRATICO MEDIO e VARIANZA*

  Si definisce varianza di una variabile casuale il valore atteso del quadrato degli scarti dal valore atteso:

$$Var(X)=\sigma^2=M\left[(X-M(X))^2\right]$$

  Nel caso discreto: $\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 p_i$ dove $\mu=M(X)$

Inoltre, come sappiamo, esiste un metodo rapido per il calcolo della varianza:

$Var(X)=M(X^2)-M^2(X)$

Vediamo ora brevemente alcune proprietà della varianza:

PROPRIETÀ I

Se a e b sono costanti reali, allora: $Var(aX+b)=a^2Var(X)$

PROPRIETÀ II

Se X e Y sono due variabili aleatorie indipendenti, allora:

$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

$Var(X-Y)=Var(X)-Var(Y)$

Per concludere, ricordiamo che lo scarto quadratico medio di una variabile casuale è la radice quadrata della varianza.

Esempi di distribuzione

Distribuzione uniforme

Una variabile casuale X si dice a *distribuzione uniforme* se X assume i valori 1, 2, 3, ... 1 n, ciascuno con probabilità eguale a *1/n.*

x	*1*	*2*	...	*n*
p	1/n	1/n		1/n

Il valor medio di una tale variabile

M(X) = 1 1/n+2 1/n+... + n*1/n=1/n(1+2+............n)*

La somma tra parentesi è la somma di n termini di una progressione aritmetica; si ha dunque

$$M(X) - 1/\ n\ (1 + 2 + \quad + n) - 1/\ n\ (1 + n)n/2 \longrightarrow M(X)=(1+ n)/2$$

La varianza, come si potrebbe dimostrare, è data da

$$\sigma\ (R) = \frac{\sqrt{p}}{(1-p)}\ \sigma^2 (X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Lo scarto quadratíco medio risulta quindi

$$\sigma^2 (X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

Consideriamo nuovamente la variabile casuale "'*punteggio ottenuto lanciando un dado"; essa* può assumere i valori 1, 2, 3, 4, 5, 6, ciascuno con probabilità eguale a 1/6 :

x	1	2	3	4	5	6
P	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*

essa è quindi una variabile casuale a distribuzione uniforme.
La sua media era già stata calcolata applicando la definizione) ritroviamo:

$$M(x) = \frac{1+n}{2} = \frac{1+6}{2} = 3,5$$

Calcoliamo la varianza

$$\sigma^2(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} = 2,9166..$$

lo scarto quadratico medio è ovviamente

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} = 1,7078$$

Per introdurre questo tipo di distribuzione, ci serviremo di un esempio.
Si immagini di lanciare ripetutamente un dado. Qual è la probabilità che esca la faccia 1 esattamente per 4 volte consecutive ? L'evento considerato si verifica se la faccia 1 esce nei primi quattro lanci e non esce al quinto
lancio;si tratta quindi dell'intersezione di cinque eventi: esce 1 al primo lancio;
esce 1 al secondo lancio; esce 1 al terzo lancio; esce 1 al quarto lancio; non esce 1 al quinto lancio. 1 primi quattro eventi hanno ciascuno probabilità 1/6, mentre il quinto evento ha probabilità 5/6. Quindi, per il teorema della probabilità composta, l'evento considerato ha probabilità

$$\frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^4 * \frac{5}{6}$$

Generalizziamo: qual è la probabilità che esca la faccia 1 per k volte consecutive? La formula precedente diventa:

$$\underbrace{\frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \frac{5}{6}}_{kvolte} = \left(\frac{1}{6}\right)^k * \frac{5}{6}$$

A questo punto non è difficile operare un'ulteriore generalizzazíone: invece di considerare il lancio di ,un dado, supponiamo di eseguire ripetutamente un esperimento, sempre nelle stesse condizioni, e sia E un evento che ha probabilità p di presentarsi in ciascuna di tali prove. Qual è la probabilità che esso si presenti esattamente k volte di seguito? Posto q = 1 - p, con ragionamenti del tutto simili a quelli appena svolti nel caso del lancio di un dado si giunge facilmente alla conclusione che tale probabilità è

$$p_k = q * p^k$$

Supponiamo ora che l'esperimento in questione possa essere ripetuto un numero indeterminato di volte e indichiamo con R il numero di volte in cui l'evento E si presenta consecutivamente, a partire dalla prima prova. Evidentemente R è una variabile casuale che può assumere i valori 0, 1, 2, ... 1 rispettivamente con probabilità p0 p1, *P2* ecc. date dalla (1). La distribuzione di probabilità di tale variabile viene detta **distribuzione geometrica,** perché i valori di tali probabilità, che sono *q, q *p,* $q * p^2 .... q * p^3$ ... costituiscono una progressione geometrica di ragione p.

Come si potrebbe dimostrare, la media di una tale variabile è

M(R) = p/1 - p

mentre la varianza è $\sigma^2(R) = \frac{p}{(1-p)^2}$

e lo scarto quadratico medio $\sigma \ (R) = \frac{\sqrt{p}}{(1-p)}$

Osservazione. Finora avevamo incontrato solo variabili casuali i cui valori erano in numero finito. Una variabile casuale a distribuzione geometrica invece può assumere *infiniti valori;* precisamente l'insieme dei valori che una tale variabile casuale può assumere è l'insieme N dei numeri naturali.

Esempio

Si lancia ripetutamente una moneta. Qual è la probabilità che esca testa rispettivamente 0, 1, 2, ... volte consecutivamente ? *Sia R il* numero di uscite consecutive della faccia "testa". Essendo p = 1/2 la probabilità dell'evento `lesta" in un singolo lancio, *R* è una variabile casuale a distribuzione geometrica che può assumere i valori 0, 1, 2, ... con probabilità date dalla (1), che si possono riassumere nella seguente tabella:

R	o	1	2	3	4
P	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32

Dunque la probabilità che "testa" esca consecutivamente 0 volte (ossia che esca "croce" già al primo lancio), è 1/2; la probabilità che "testa" esca consecutivamente solo 1 volta (ossia che esca "testa" al primo lancio e "croce" al secondo), è 1/4, ecc.

Per la (2) la media di tale variabile casuale è $\binom{n}{k} * \left(\frac{1}{6}\right)^k * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$ $M(R) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$

Variabile casuale a distribuzione binomiale

Anche per introdurre questo tipo di distribuzione ci serviremo di esempio, considerando il cosiddetto "problema delle prove ripetute".

Si immagini di lanciare un dado per 3 volte. Qual è la probabilità che la faccia 1 esca esattamente 2 volte? Se indichiamo con *LI, L2, L3* i tre lanci ciò può accadere se:

a. la faccia *1* esce ai lanci *L1, L2,* ma non esce al lancio *L3;*

b. la faccia 1 esce ai lanci L1, *L3,* ma non esce al lancio *L2;*

e. la faccia 1 esce ai lanci *L2, L3,* ma non esce al lancio L1.

Ciascuno di questi eventi corrisponde a un sottoinsieme di due elementi dell'insieme *{LI; L2; L3}* inoltre ciascuno di tali eventi, che sono tra loro dísgiunti, è a sua volta l'intersezione di tre eventi indipendenti l'uscita della faccia uno in ognuno dei due lanci prefissati e l'uscita di una faccia dive nel lancio restante: essendo 1/6 la probabilità che in un dato lancio esca 1 e 5/6 la probabilità che non esca 1, ciascuno di questi tre eventi ha quindi probabilità $\left(\frac{1}{6}\right)^2 * \frac{5}{6}$ Perciò la probabilità che sui tre lanci la faccia 1 esca esattamente due volte è 3 $\left(\frac{1}{6}\right)^2 * \frac{5}{6}$ =5/7

Cerchiamo ora di generalizzare: se lanciamo il dado *n* volte, qual è la probabilità che 1 esca esattamente k volte?

Indichiamo con *LI, L2, ..., Ln* gli *n* lanci e, supposto che l'evento si sia verificato, ossia che la faccia sia effettivamente uscita esattamente k volte, formiamo il sottoinsieme di k elementi dell'insieme *{Li, L2, _,* Ln}, corrispondente ai lanci in cui è uscita la faccia l. Poiché vi sono $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi di k elementi dell'ínsieme *{LI, L2, _, Ln},* l'evento considerato può presentarsi in altrettanti modi diversi, ossia è l'unione di $\binom{n}{k}$ eventi disgiunti M. Ciascuno di essi è a sua volta l'intersezione di n eventi indipendenti: l'uscita della faccia uno in ognuno dei k lanci prefissati è l'uscita di una
faccia diversa nei restanti *n - k* lanci: essendo 1/6 la probabilità che in un dato lancio esca *1* e 5/6 la probabilità che non esca 1, ciascuno di questi tre eventi ha quindi probabilità. $\left(\frac{1}{6}\right)^k * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$ *Perciò* probabilità che su n lanci la faccia 1 esca esattamente k volte è $\binom{n}{k} * \left(\frac{1}{6}\right)^k * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$

Per operare un'ulteriore generalizzazione supponiamo di eseguire n prove tutte nelle stesse condizioni, e sia E un evento che ha probabilità p di presentarsi in ciascuna di tali prove. Qual è la probabilità che esso si presenti k volte? Posto q = 1 - p, con ragionamenti del tutto simili a quelli appena svolti nel caso del lancio di un dado M, si giunge facilmente alla conclusione che tale probabilità è

(1) $p_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}$ $p_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} * p^k * q^{n-k}$

Prefissato n, indichiamo con S il numero dei successi, ossia il numero di volte in cui si presenta l'evento E nelle *n* prove.. Evidentemente S è una variabile casuale che può assumere i valori 0, 1, 2, - - ., n,

rispettivamente.. con probabilità date dalla (1). La distribuzione di tale variabile viene detta **distribuzione binomiale.**

Come si potrebbe dimostrare la media di una tale variabile è
M(S)=n*p

mentre la varianza è $\sigma^2(S) = n * p * q$

lo scarto quadratico medio $\sigma\ (S) = \sqrt{n * p * q}$

Esempio *Si lancia una moneta 8 volte. Calcolare la probabilità che esca 3 volte "testa".*

la (1) con n=8, k=3,p= 1/2, q= 1 - p = 1/2, ci dà immediatamente la risposta. la probabilità cercata è:

$$p_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{7}{32}$$

Variabile casuale a distribuzione poissoniana

La distribuzione *di Poísson è* quella distribuzione che assegna, a un variabile casuale K che può assumere i valori naturali k = 0, k = 1, k = 2, rispettivamente le probabilità
(1)

$$p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Per comprendere il significato di tale distribuzione di probabilità si consideri nuovamente la dístrìbuzione binomiale trattata al paragrafo precedente, che può assumere i valori interi k = 0, k = 1, k = 2, ... k = n con probabilità

$$p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} \qquad (2)$$

e la cui media *è np. Posto* λ *= np si* faccia crescere n, mantenendo costante la media λ ossia in modo che risulti p = λ */n.* In tale ipotesi il valore di *Pn,k* tende ad avvicinarsi al valore di λ dato dalla (1), ossia, come si potrebbe dimostrare si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \left(p = \frac{\lambda}{n}, q = 1 - p \right)$$

In altre parole., la distribuzione poissoniana può essere considerata come il limite della distribuzione
bínomiale, al tendere all'infinito del numero, n *di* prove. Essa può quindi essere utilizzata per
approssimare la distribuzione binomiale in tutti i casi in cui **n** sia molto elevato ed eventualmente
addirittura incognito: in tali casi infatti, il calcolo della (2) può risultare molto complesso se non impossibile.
Si dimostra anche che la media e la varianza di una variabile poissoniana sono

$$M(K) = \lambda$$
$$\sigma^2(K) = \lambda$$

ALCUNE DISTRIBUZIONI CONTINUE

Tutti i modelli precedenti forniscono la distribuzione teorica di variabili casuali discrete. Quando si
devono descrivere **variabili casuali continue e positiv**e, come peso, altezza, reddito, tempo, i
modelli più utili sono quelli di seguito riportati. Tra essi, la distribuzione più frequente e di maggiore
utilità nella ricerca sperimentale, **fondamento della statistica parametrica, è la distribuzione**
normale o gaussiana.

DISTRIBUZIONE NORMALE O DI GAUSS

La più importante distribuzione continua è la curva normale. E' stata individuata per la prima volta da
De Moivre (1733) ed è stata proposta da Gauss (1809) nell'ambito della teoria degli errori. Nella
letteratura francese è attribuita anche a Laplace (1812), che ne avrebbe definito le proprietà principali
prima della trattazione più completa fatta da Gauss in varie riprese, a partire dal 1809.
Il nome di **curva normale** deriva dalla convinzione, non sempre corretta, che molti fenomeni, da
quelli biologici e quelli fisici, normalmente si distribuiscano secondo la **curva gaussian**a. La sua
denominazione di **curva degli errori accidental**i, diffusa soprattutto nelle discipline fisiche, deriva
dall'osservazione sperimentale che la distribuzione degli errori, commessi quando si misura
ripetutamente la stessa grandezza, è molto bene approssimata da tale curva.
Sotto l'aspetto matematico, la distribuzione gaussiana può essere considerata come il limite della
distribuzione binomiale
- per **n** che tende all'infinito,
- mentre né **p** né **q** tendono a 0 (condizione che la differenzia dalla poissoniana).

Se **n** tende all'infinito e **p** resta costante, la media **(n×**p) a sua volta si approssima all'infinito e rende la
distribuzione senza applicazioni pratiche. Per contro, la variabile considerata, che nel caso di pochi

dati era quantificata per unità discrete, può essere espressa in unità sempre minori, tanto che diventa
accettabile esprimerla come una grandezza continua.
La distribuzione gaussiana può essere considerata il limite anche della distribuzione poissoniana,

quando **i e** μ diventano molto grandi.
Quando **n** tende all'infinito (in realtà quando n, **i** e μ sono molto grandi) a condizione che né **p** né **q**
tendano a 0, secondo il teorema di De Moivre (1833) la probabilità **Pi** della distribuzione binomiale è
sempre meglio approssimata da

$$P(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot n \cdot p \cdot q}} e^{\frac{(i-n\cdot p)^2}{2\cdot n\cdot p\cdot q}}$$

Sostituendo **n×p** con la media μ della popolazione,
n×p×q con la varianza σ^2 della popolazione
e il conteggio **i** (indice di un valore discreto) con **x** (indice di una misura continua),
si ottiene

$$y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

che è l'espressione della **funzione di densità di probabilità** (o delle frequenze relative) della
distribuzione normale. In termini meno matematici, **permette di stimare il valore di Y (il valore
dell'ordinata o altezza della curva) per ogni valore di X (il valore della ascissa**).
La curva normale ha la forma rappresentata nella figura