

# IL CALCOLO COMBINATORIO

## 0. Introduzione

Oggetto del calcolo combinatorio è quello di determinare il numero dei modi mediante i quali possono essere associati, secondo prefissate regole, gli elementi di uno stesso insieme o di più insiemi.

In molte applicazioni sorge il problema di sapere in quanti modi possibili si può presentare un certo fenomeno. Il problema, all'apparenza, sembra banale: ciò è vero se il numero degli elementi presi in considerazione è piccolo, ma quando questo numero è elevato si presentano delle difficoltà nel formare tutti i raggruppamenti possibili e senza considerare ripetizioni.

Nelle applicazioni ci si può, per esempio, chiedere:

- In quanti modi diversi si possono scegliere tre libri da una libreria che ne contiene 12?
- In quanti modi si possono scegliere tre numeri diversi, compresi tra 1 e 50, in modo che la loro somma sia divisibile per 4?
- Nel menù di un ristorante si può scegliere tra cinque primi piatti, sei secondi e sette dessert: quanti tipi di pasti, con almeno una portata diversa, può somministrare il ristorante?

e così via.

Il calcolo combinatorio oltre che a rispondere a domande del tipo precedente costituisce anche uno strumento aritmetico che è di supporto indispensabile nel Calcolo delle Probabilità poiché consente di determinare il numero di eventi possibili (ma anche quelli favorevoli e contrari) che si possono verificare in una prova.

In definitiva possiamo dire che il Calcolo combinatorio fornisce quegli strumenti di calcolo per determinare il numero di raggruppamenti che si possono formare con un numero  $k$  di oggetti presi da un insieme contenente  $n$  oggetti ( $n \geq k$ ) secondo le modalità seguenti:

- $i$   $k$  oggetti possono formare gruppi ordinati (che chiameremo *disposizioni*);
- $i$   $k$  oggetti possono formare gruppi non ordinati (che chiameremo *combinazioni*);
- se  $k = n$  otterremo dei gruppi ordinati che chiameremo *permutazioni*.

Esaminiamo in dettaglio questi raggruppamenti.

## 1. Disposizioni semplici

Consideriamo un insieme  $A$  formato da  $n$  elementi distinti ed un numero  $k \leq n$ . Si chiamano *disposizioni semplici* degli  $n$  elementi presi a  $k$  a  $k$  (o *disposizioni della classe  $k$* ) un gruppo ordinato formato da  $k$  degli  $n$  elementi dell'insieme dato  $A$  in modo che valgano le seguenti proprietà:

1. in ciascun raggruppamento figurano  $k$  oggetti senza ripetizione;
2. due di tali disposizioni si ritengono diverse quando differiscono per almeno un elemento oppure per l'ordine con cui gli stessi elementi si presentano.

Il numero delle disposizioni semplici di  $n$  elementi distinti, della classe  $k$ , si indica con il simbolo  $D_{n,k}$  il cui valore è dato dal teorema (che non dimostreremo) seguente:

*Il numero delle disposizioni semplici di  $n$  elementi distinti della classe  $k$ , è uguale al prodotto di  $k$  numeri interi consecutivi decrescenti dei quali il primo è  $n$ .*

Si ha cioè:

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

e si dimostra che:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Il simbolo  $n!$  si legge *n fattoriale* e non è altro che il prodotto di  $n$  numeri interi decrescenti a partire da  $n$  e per definizione si pone  $0! = 1$ . Così, ad esempio, se vogliamo calcolare  $D_{7,3}$  nei due modi descritti, si ha:

$$D_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

$$D_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210.$$

## 2. Disposizioni con ripetizione

Consideriamo un insieme costituito  $n$  elementi distinti ed un numero naturale  $k$  senza alcuna limitazione superiore. Il problema che ci poniamo è quello di costruire tutti i possibili raggruppamenti distinti prendendo  $k$  oggetti in modo che:

- a) in ciascun raggruppamento figurano  $k$  oggetti ed uno stesso oggetto può figurare, ripetuto, fino ad un massimo di  $k$  volte;
- b) due qualsiasi raggruppamenti sono distinti se uno di essi contiene almeno un oggetto che non figura nell'altro, oppure gli oggetti sono diversamente ordinati, oppure gli oggetti che figurano in uno figurano anche nell'altro ma sono ripetuti un numero diverso di volte.

Il numero delle disposizioni con ripetizione si indica con il simbolo  $D'_{n,k}$  e si dimostra che tale numero è dato da:

$$D'_{n,k} = n^k.$$

Ad esempio, determiniamo quanti numeri diversi di tre cifre si possono formare con le nove cifre significative. È evidente che si tratta di disposizioni con ripetizione di 9 elementi della classe 3, per cui è:

$$D'_{9,3} = 9^3 = 729.$$

## 3. Permutazioni semplici

Le *permutazioni semplici* altro non sono che le disposizioni di  $n$  oggetti presi ad  $n$  ad  $n$ . ossia, dato un insieme di  $n$  oggetti, si dicono *permutazioni* di tali  $n$  oggetti tutti i gruppi che si possono formare con gli  $n$  oggetti dati prendendoli tutti. Se ne deduce allora che le permutazioni semplici differiscono soltanto per l'*ordine* con cui sono disposti gli  $n$  oggetti distinti contenuti nei vari raggruppamenti.

Dalla definizione segue quindi che le permutazioni coincidono con le disposizioni semplici di classe  $n$ , quindi il calcolo delle permutazioni è uguale al calcolo del numero delle disposizioni semplici di  $n$  elementi di classe  $n$ ; in pratica è:

$$P_n = D_{n,n} \quad \Rightarrow \quad P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

*cioè: il numero delle permutazioni di  $n$  elementi distinti è uguale al prodotto dei primi  $n$  numeri naturali (escluso lo zero).*

Ricorrendo alla definizione di fattoriale, possiamo anche dire che: *il numero delle permutazioni semplici di  $n$  elementi distinti è dato dal fattoriale del numero  $n$ , ossia:*

$$P_n = n!$$

Gli anagrammi altro non sono che le permutazioni che si ottengono da una parola variando solo il posto delle lettere.

Ad esempio, con la parola ROMA (composta da 4 lettere) si ottengono

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

anagrammi.

#### **4. Permutazioni di $n$ elementi non tutti diversi**

Nel paragrafo precedente abbiamo supposto che gli  $n$  elementi dell'insieme fossero tutti distinti. Supponiamo ora che di questi  $n$  elementi ve ne siano  $\alpha$  uguali tra loro ( $\alpha < n$ ). Ci proponiamo allora di trovare il numero delle loro permutazioni che indicheremo con  $P_n^{(\alpha)}$ .

Iniziamo con un esempio. Consideriamo la parola ORO che contiene due lettere uguali. Abbiamo visto che il numero di anagrammi di una parola (con lettere tutte diverse) di tre lettere è dato da:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Nel caso della parola ORO i possibili anagrammi distinti sono soltanto:

ORO      ROO      OOR

cioè sono tre e non sei come ci si sarebbe aspettato, cioè sono in numero minore di  $P_n$ . In generale, volendo calcolare le permutazioni di  $n$  oggetti in cui ve ne siano  $\alpha$  identici fra loro, si ottiene un numero di permutazioni dato da:

$$P_n^{(\alpha)} = \frac{P_n}{\alpha!} = \frac{n!}{\alpha!}$$

Nel nostro caso quindi è:

$$P_3^{(2)} = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3$$

Se poi, data una parola di  $n$  lettere nella quale una lettera è ripetuta  $\alpha$  volte, un'altra  $\beta$  volte, ecc. o, più in generale, dato un insieme di  $n$  elementi dei quali  $\alpha$  sono uguali fra loro,  $\beta$  uguali fra loro, ecc., il numero delle permutazioni distinte con elementi ripetuti che si possono ottenere è dato da:

$$P_n^{(\alpha, \beta, \dots)} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots}$$

Ad esempio, se prendiamo in considerazione la parola MATEMATICA osserviamo che nelle 10 lettere in essa contenute, la lettera M si ripete 2 volte ( $\alpha = 2$ ), la lettera A si ripete 3 volte ( $\beta = 3$ ) e la lettera T si ripete 2 volte ( $\gamma = 2$ ). Il numero di anagrammi distinti che si possono costruire con essa è dato da:

$$P_{10}^{(2,3,2)} = \frac{10!}{2! 3! 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 151.200$$

## 5. Combinazioni semplici

Dato un insieme di  $n$  elementi, si dicono *combinazioni semplici* degli  $n$  elementi presi a  $k$  a  $k$  (o di *classe k*)  $k \leq n$  tutti i gruppi di  $k$  elementi, scelti fra gli  $n$  dell'insieme dato, in modo che ciascun gruppo differisca dai restanti almeno per uno degli elementi in esso contenuti (senza considerare, quindi, l'ordine degli elementi).

Da notare la differenza fra *disposizioni* e *combinazioni* (semplici): mentre nelle disposizioni si tiene conto dell'ordine, nelle combinazioni semplici, invece, si considerano distinti solo quando due i raggruppamenti differiscono almeno per un elemento. Per determinare il numero delle combinazioni semplici di  $n$  elementi di classe  $k$ , e che indichiamo con il simbolo  $C_{n,k}$ , ci serviamo della formula:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k}$$

ossia:

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1} \quad (\clubsuit)$$

Da questa formula si ricava che il numero delle combinazioni di  $n$  oggetti di classe  $k$  è dato dal quoziente di  $k$  fattori interi, consecutivi, decrescenti a partire da  $n$  ed il prodotto di  $k$  fattori interi, consecutivi, decrescenti, a partire da  $k$ .

La  $(\clubsuit)$  la possiamo scrivere anche sotto un'altra forma; infatti, moltiplicando numeratore e denominatore per il fattore  $(n-k)!$  si ottiene:

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! (n-k)!}$$

$$C_{n,k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{k! (n-k)!}.$$

Essendo il numeratore di questa frazione uguale ad  $n!$ , possiamo scrivere:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

## 6. Combinazioni con ripetizione

si possono prendere in considerazione anche le *combinazioni con ripetizione*. Consideriamo un insieme formato da  $n$  elementi e fissiamo un numero  $k$  (senza alcuna limitazione superiore): ci proponiamo di costruire i possibili raggruppamenti distinti prendendo  $k$  elementi dell'insieme dato in modo che:

- a) in ciascun raggruppamento figurino  $k$  elementi dell'insieme dato potendovi uno stesso elemento figurare più volte fino ad un massimo di  $k$  volte;
- b) due raggruppamenti sono distinti se uno di essi contiene almeno un elemento che non figura nell'altro, oppure gli elementi che figurano in uno figurano anche nell'altro ma sono ripetuti un numero diverso di volte.

Consideriamo, ad esempio, l'insieme:

$$A = \{a, b, c\}$$

Le combinazioni di classe 2, con ripetizione, sono:

$$(a, a) \quad (a, b) \quad (a, c) \quad (b, b) \quad (b, c) \quad (c, c)$$

(sono sei). Le combinazioni di classe 3, con ripetizione, sono:

$$\begin{array}{cccccc} (a, a, a) & (a, a, b) & (a, a, c) & (a, b, b) & (a, b, c) & \\ (a, c, c) & (b, b, b) & (b, b, c) & (b, c, c) & (a, c, c) & \end{array}$$

(sono 10). La formula che dà il numero delle combinazioni con ripetizione di  $n$  elemento di classe  $k$  è:

$$C'_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k! (n-1)!}$$

Nell'esempio precedente si ha:

$$C'_{3,2} = \frac{(3+2-1)!}{2! (3-1)!} = \frac{4!}{2! 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

$$C'_{3,3} = \frac{(3+3-1)!}{3! (3-1)!} = \frac{5!}{3! 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

## 7. Coefficienti binomiali e potenza di un binomio

Il numero delle combinazioni semplici,  $C_{n,k}$  è spesso indicato con il simbolo seguente:

$$\binom{n}{k}$$

che si legge « $n$  su  $k$ » e viene detto *coefficiente binomiale* perché se ne fa uso nello sviluppo della potenza di un binomio.

Per definizione è quindi:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

Per la convenzione  $0! = 1$ , ha significato anche la scrittura

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0! n!} = 1.$$

In base a questa nuova definizione possiamo dire che il numero delle combinazioni con ripetizione è dato dalla:

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Consideriamo due numeri reali qualunque  $a$  e  $b$ . Sono note le formule:

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= a + b \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

e così via. Analizzando il calcolo della generica potenza di un binomio notiamo che tutti gli sviluppi sono dei polinomi omogenei e completi, di grado uguale all'esponente della potenza. Ordinando gli sviluppi secondo le potenze decrescenti di uno dei due monomi, notiamo che i loro coefficienti sono numeri del seguente prospetto che noi chiamiamo *Triangolo di Tartaglia* e che i francesi chiamano *Triangolo di Pascal*:

				1						
				1	1					
				1	2	1				
				1	3	3	1			
				1	4	6	4	1		
				1	5	10	10	5	1	
				.....						
				.....						
				.....						

per la cui costruzione è sufficiente osservare che ogni riga inizia e termina con 1 e gli altri valori si ottengono come somma dei due elementi sovrastanti. Questo triangolo può essere scritto nel modo seguente con lo sviluppo della potenza secondo Newton, il quale, nella sua dimostrazione, fa uso delle combinazioni:



$$\begin{array}{c}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
 \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
 \dots\dots\dots
 \end{array}$$

Sussiste il teorema: *qualunque siano i due numeri a e b e l'intero positivo n, si ha:*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

cioè lo sviluppo di  $(a + b)^n$  è un polinomio omogeneo di grado  $n$  nel complesso delle due variabili  $a$  e  $b$  che, ordinato secondo le potenze decrescenti di  $a$  (e crescenti di  $b$  e viceversa) ha per coefficienti i numeri:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad \dots, \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Lo sviluppo della potenza del binomio con il metodo di Newton può essere scritto in maniera più compatta nel modo seguente:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (\spadesuit)$$

Per ottenere lo sviluppo di  $(a - b)^n$  basterà sostituire nella  $(\spadesuit)$  al termine  $b$  il valore  $-b$  e tenere conto che  $a^{n-k} b^k$  risulteranno positivi o negativi a seconda che l'esponente  $k$  di  $b$  sia pari o dispari, cioè possiamo scrivere la formula:

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k .$$