

Le funzioni di due variabili

1)DEFINIZIONE

Se consideriamo una coppia di numeri reali X,Y e ad essi facciamo corrispondere un altro numero reale Z , allora abbiamo determinato una funzione reale di due variabili reali.

In generale si dirà FUNZIONE REALE DI DUE VARIABILI REALI una relazione che associa ad ogni coppia ordinata di numeri reali (X,Y) , appartenenti ad R^2 , uno ed un solo numero reale Z .

Tecnicamente si scriverà: $(X,Y) \rightarrow Z = f(X,Y)$.

Si definirà invece FUNZIONE REALE DI N VARIABILI REALI una relazione che associa ad ogni n-upla di numeri reali $(x_1,x_2,...x_n)$, appartenenti ad R^n , uno ed un solo numero reale Z .

Tecnicamente si scriverà:

$$(x_1,x_2,...x_n) \rightarrow Z=f(x_1,x_2,...x_n)$$

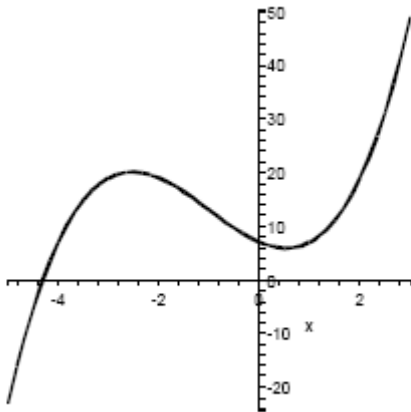
2)DOMINIO e CODOMINIO DI UNA FUNZIONE A DUE VARIABILI

Come per le funzioni ad una sola variabile si definisce DOMINIO DI UNA FUNZIONE A due VARIABILI l'insieme dei valori che possono essere attribuiti alle variabili indipendenti (X,Y) della funzione data.

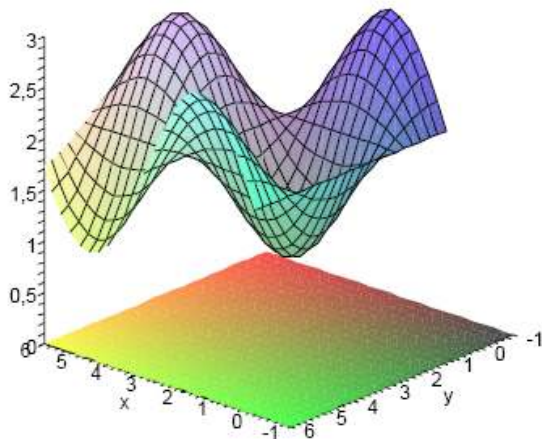
Si definisce invece CODOMINIO DI UNA FUNZIONE A DUE VARIABILI l'insieme dei valori che corrispondono alla variabile dipendente Z .

Si tengano sempre presenti le seguenti differenze tra le FUNZIONI AD una sola VARIABILE e quelle a due VARIABILI:

1)Il GRAFICO di una FUNZIONE AD UNA VARIABILE risulta una curva rappresentabile nel piano cartesiano.



2)Il GRAFICO di una FUNZIONE A DUE VARIABILI risulta una superficie rappresentabile nello spazio a 3 dimensioni.



3) Il DOMINIO di una FUNZIONE ad 1 VARIABILE risulta l'asse reale o parte di esso

4) Il DOMINIO di una FUNZIONE A 2 VARIABILI risulta il piano \mathbb{R}^2 o parte di esso.

In base al 4) caso si può allora dire che:

- a) Il DOMINIO di una FUNZIONE A 2 VARIABILI razionale non fratta risulta il piano \mathbb{R}^2
- b) Il DOMINIO di una FUNZIONE A 2 VARIABILI razionale fratta risulta il piano \mathbb{R}^2 privato dei punti della curva presente nel suo denominatore.
- c) Se la FUNZIONE A 2 VARIABILI è IRRAZIONALE o TRASCENDENTE si riprende la teoria delle FUNZIONI AD 1 VARIABILE IRRAZIONALI o TRASCENDENTI in relazione al DOMINIO.

3) LINEE DI LIVELLO DI UNA FUNZIONE A 2 VARIABILI

Per poter rappresentare una FUNZIONE A 2 VARIABILI con una certa approssimazione reale è necessario cercare le linee di livello della suddetta FUNZIONE.

Le LINEE DI LIVELLO di una FUNZIONE A 2 VARIABILI risultano l'insieme delle intersezioni tra la stessa funzione e l'insieme dei piani paralleli $Z=K$ al variare di K nell'insieme dei numeri reali.

In pratica per trovare una linea di livello si fa il sistema tra la funzione data ed un piano definito con Z uguale ad un particolare numero K .

In questo modo viene a determinarsi o una retta o una curva che risulta l'immagine della data FUNZIONE nella quota K .

Le LINEE DI LIVELLO sono RETTE se la funzione data, scritta in forma implicita, risulta di secondo grado solo nei termini dove esiste Z ;

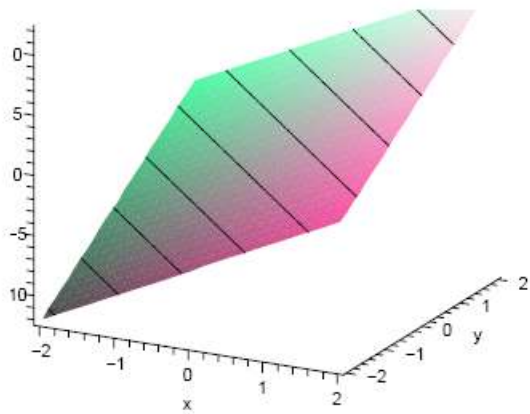
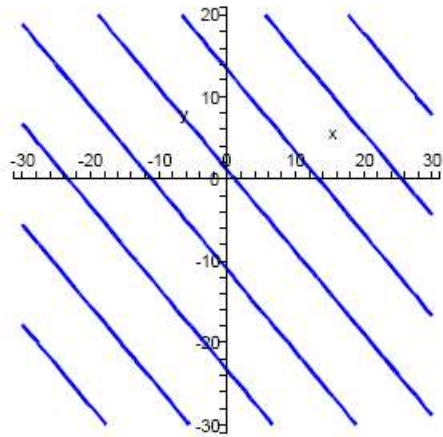


Grafico della funzione
 $f(x, y) = 3x + 3y$



Curve di livello della funzione
 $f(x, y) = 3x + 3y$

Le LINEE DI LIVELLO sono coniche(parabole,ellissi,cerchi,iperboli) se la funzione data, scritta in forma implicita, risulta di terzo grado solo nei termini dove esiste Z oppure di secondo grado in almeno un termine non contenente Z.

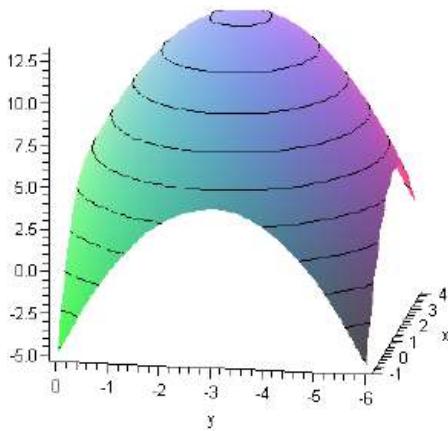
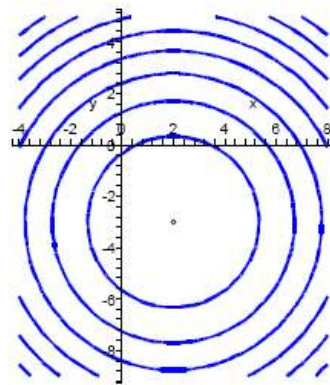


Grafico di
 $f(x, y) = -x^2 + 4x - y^2 - 6y$



Curve di livello della
 funzione

$f(x, y) = -x^2 + 4x - y^2 - 6y$

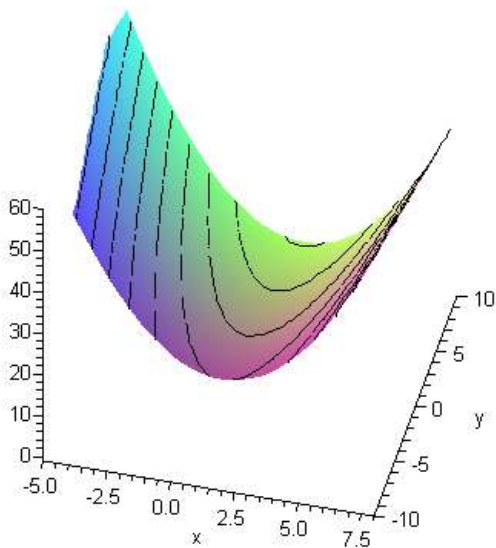
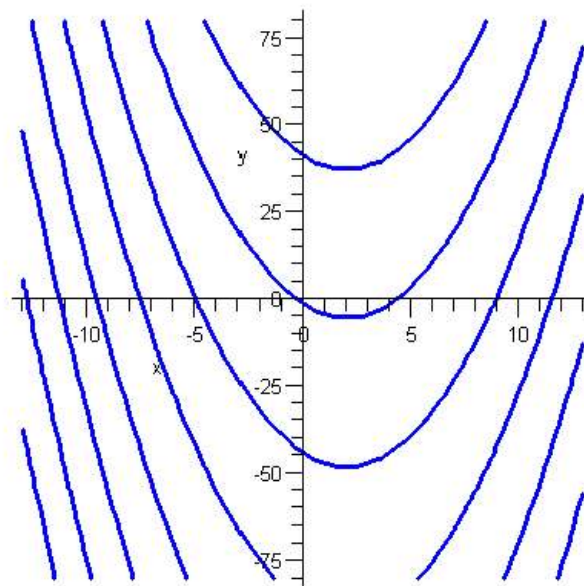


Grafico di $f(x, y) = x^2 - 4x - y + 20$



Curve di livello di

$f(x, y) = x^2 - 4x - y + 20$

Le LINEE DI LIVELLO sono curve di grado superiore al secondo se la funzione data, scritta in forma implicita, ha grado superiore al terzo nei termini contenenti Z o almeno di terzo grado nei termini non contenenti Z.

4) INTORNO CIRCOLARE APERTO DI UN PUNTO DI UNA FUNZIONE A 2 VARIABILI

Si definisce intorno circolare aperto di un punto $P(x_0, y_0)$ l'insieme dei punti del piano interni alla circonferenza di centro P e raggio r ovvero i punti del piano $Q(x, y)$ per i quali risulta verificata la disequazione $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2$

L'intorno circolare si dirà chiuso se la disequazione risulta \leq



5) CONTINUITA' DI UNA FUNZIONE A 2 VARIABILI

Come per le FUNZIONI AD 1 VARIABILE si potrà dire che una FUNZIONE A 2 VARIABILI risulta CONTINUA in un punto P_0 appartenente al suo Dominio se risulta

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$$

Possiamo altresì affermare che una FUNZIONE A 2 VARIABILI è continua in tutto il suo Dominio se risulta

continua in ogni punto del suo Dominio.

6) ENUNCIATO DEL TEOREMA DI WEIERSTRASS

Afferma che UNA FUNZIONE CONTINUA IN UN INSIEME CHIUSO E LIMITATO S (SOTTOINSIEME DEL SUO DOMINIO), HA CERTAMENTE UN MINIMO ASSOLUTO ED UN MASSIMO ASSOLUTO NELL'INSIEME S.

7) DERIVATE PARZIALI e DIFFERENZIALE di una FUNZIONE A 2 VARIABILI

La derivazione di una funzione a 2 variabili ha la stessa importanza della derivata di una funzione ad 1 variabile.

Così per trovare la crescita e la decrescita e i punti di minimo e massimo di una funzione a 2 variabili si utilizzano anche le derivate di tale funzione. La derivazione di una funzione a 2 variabili, però, può essere eseguita in due modi.

Infatti essa può essere fatta o in funzione della variabile X oppure in funzione della variabile Y.

L'introduzione ad essa avviene come per le funzioni ad 1 variabile, ovvero come limite di un rapporto incrementale.

Si definisce infatti DERIVATA PARZIALE in un punto $P(X_0, Y_0)$ di una FUNZIONE A 2 VARIABILI rispetto la variabile X il

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X_0+h, Y_0) - f(X_0, Y_0)}{h}$$

Si definisce DERIVATA PARZIALE in un punto $P(X_0, Y_0)$ di una FUNZIONE A 2 VARIABILI rispetto la variabile Y il

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(X_0, Y_0+k) - f(X_0, Y_0)}{k}$$

Ovviamente esiste una definizione generale per una qualsiasi derivata parziale e precisamente:

SI DEFINISCE DERIVATA PARZIALE RISPETTO AD UNA DELLE DUE VARIABILI DI UNA FUNZIONE REALE A DUE VARIABILI $Z=f(X, Y)$, LA DERIVATA DELLA FUNZIONE QUANDO L'ALTRA VARIABILE SI CONSIDERA COSTANTE.

La derivata prima rispetto la X si indica f'_x

La derivata prima rispetto la Y si indica f'_y

La derivata seconda rispetto la X si indica f''_{xx}

La derivata seconda rispetto la Y si indica f''_{yy}

Il teorema di Schwartz

Esiste anche una derivata seconda mista f''_{xy} per la quale vale un teorema detto dell'inversione dell'ordine di derivazione che afferma: Se in un intorno di $P(X_0, Y_0)$ esistono le derivate parziali prime e seconde e se la f''_{yx} risulta continua in P allora esiste in P anche la f''_{xy} e risulterà $f''_{xy} = f''_{yx}$

Vediamo alcuni esempi:

1 $f(x,y) = x^2 - 3xy - 4y^2 - x + 2y + 1$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - 3y - 1$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -3x - 8y + 2$$

2 $f(x,y) = x^3 + 10xy + 8y$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2 + 10y$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 10x + 8$$

Si definisce DIFFERENZIALE TOTALE di una FUNZIONE A 2 VARIABILI la quantità

$$df = f_x dx + f_y dy$$

8) EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE AD UNA FUNZIONE A 2 VARIABILI IN UN SUO PUNTO P(X0,Y0)

Consideriamo di avere una FUNZIONE A 2 VARIABILI ed un suo punto P(X0,Y0).
 Vogliamo scrivere l'EQUAZIONE DEL PIANO TANGENTE ALLA SUPERFICIE INDIVIDUATA DALLA FUNZIONE DATA NEL SUO PUNTO P.

Attraverso una dimostrazione di cui si omette la dimostrazione si verifica che tale equazione risulta

$$Z = f(X_0, Y_0) + f_x(X_0, Y_0)(X - X_0) + f_y(X_0, Y_0)(Y - Y_0)$$

In tale equazione $f(X_0, Y_0)$ e' la terza coordinata di P;

$f_x(X_0, Y_0)$ e' la derivata rispetto X in P;

$f_y(X_0, Y_0)$ e' la derivata rispetto Y in P.

9) MASSIMI E MINIMI LIBERI DI UNA FUNZIONE A 2 VARIABILI

Si eseguono attentamente i seguenti passaggi:

a) Si risolve il sistema

$$f_x(X, Y) = 0$$

$$f_y(X, Y) = 0$$

e si trovano le coordinate degli eventuali punti di MINIMO e MASSIMO

b) Si calcola l'HESSIANO

$$H(X, Y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

c) Si sostituiscono le coordinate dei punti trovati in a) nel risultato trovato in b).

Si trovano gli $H(X_i, Y_i)$.

d)

1) $H(X_i, Y_i)$ risultano > 0 allora vedi il punto e)

Se 2) $H(X_i, Y_i)$ risultano $= 0$ "" "" "" "" f)

3) $H(X_i, Y_i)$ risultano < 0 "" "" "" "" g)

e) Se $f''_{xx} > 0$ allora il punto risulta MINIMO RELATIVO

"" $f''_{xx} < 0$ "" "" "" "" MASSIMO RELATIVO

f) Risulta un caso ambiguo. Cercare qualche LINEA DI LIVELLO in prossimità del punto considerato.

g) Se risulta $f''_{xx} * f''_{yy} < 0$ allora il punto e' PUNTO DI SELLA

''' ''' $f''_{xx} * f''_{yy} = 0$ Caso ambiguo-->Linee di livello

''' ''' $f''_{xx} * f''_{yy} > 0$ allora il punto e' PUNTO DI FLESSO

Vediamo un esempio

Esempio:

$$z = x^2 + y^2 - 2x$$

$$\begin{cases} z'_x = 2x - 2 = 0 \\ z'_y = 2y = 0 \end{cases} \rightarrow P(1, 0) \text{ punto critico}$$

$$z''_{xx} = 2 \quad z''_{yy} = 2 \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 0$$

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \text{ e poich\u00e9 } z''_{xx} > 0 \rightarrow P \text{ \u00e9 punto di minimo}$$

10) MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE A 2 VARIABILI VINCOLATI DA UNA EQUAZIONE

Poniamo che $Z = f(X, Y)$ e' la funzione e $g(X, Y) = 0$ e' il vincolo

Utilizziamo un quadro che facilita lo studio

a) Si considera la FUNZIONE LAGRANGIANA

$$T = f(X, Y) + k * g(X, Y)$$

b) Si esegue il sistema:

$$\begin{aligned} f'_x(X, Y) + k * g'_x(X, Y) &= 0 \\ f'_y(X, Y) + k * g'_y(X, Y) &= 0 \\ g(X, Y) &= 0 \end{aligned}$$

Esso e' ottenuto derivando la funzione lagrangiana rispetto la variabili X, Y e k. Con successivo passaggio tale sistema diventa

$$\begin{aligned} f'_x(X, Y) * g'_y(X, Y) &= f'_y(X, Y) * g'_x(X, Y) \\ g(X, Y) &= 0 \end{aligned}$$

Risolto tale sistema si trovano gli eventuali punti di MINIMO e MASSIMO VINCOLATI.

c) Si calcola l'HESSIANO ORLATO:

$$H(X, Y) = \begin{vmatrix} 0 & g'_x(X, Y) & g'_y(X, Y) \\ g'_x(X, Y) & T''_{xx} & T''_{xy} \\ g'_y(X, Y) & T''_{yx} & T''_{yy} \end{vmatrix}$$

d) Risolto tale determinante e sostituiti le coordinate dei punti trovati nel punto b) possono avvenire i

seguenti casi:

- 1) $H(x_0, y_0) > 0$:il punto risulta di MASSIMO
- 2) $H(x_0, y_0) = 0$:caso ambiguo-->linee di livello
- 3) $H(x_0, y_0) < 0$:il punto risulta di MINIMO

11) MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE A 2 VARIABILI CON VINCOLI DATI DA DISEQUAZIONI LINEARI

Si procede anche in questo caso eseguendo i seguenti passaggi:

- a) Si determina, attraverso il metodo grafico, la figura piana soluzione del sistema dei vincoli (Vedi anche PROGRAMMAZIONE LINEARE)
- b) Si calcolano i MASSIMI e MINIMI liberi della FUNZIONE $Z=f(X,Y)$ che stanno dentro la figura come al punto a)
- c) Si cercano i punti di MINIMO e MASSIMO nella frontiera sostituendo le equazioni di essa nella FUNZIONE data che diventa, così, ad 1 variabile
- d) Si cerca la quota dei vertici della figura del punto a) e si confronta con quella dei punti trovati prima.
- e) Si definisce il minimo e massimo assoluto con i risultati ottenuti.

12) A COSA SERVONO IN ECONOMIA LE FUNZIONI DI DUE VARIABILI ?

Molti problemi dell'economia sono caratterizzati dalla presenza di due (ma anche più variabili). Ne segue che la formalizzazione matematica di uno di questi problemi ci porta alla presenza di funzioni di due ma anche di più variabili. Ad esempio consideriamo un'impresa che produce un dato prodotto in quantità q impiegando due fattori produttivi A e B che, entro certi limiti, sono tra loro sostituibili. Il legame tra i fattori A , B e la produzione q è dato dalla funzione di produzione $q = f(x,y)$ dove x = quantità di A , y = quantità di B per produrre la quantità q del prodotto.

In pratica, la funzione di produzione esprime una relazione tecnico-economica (determinata dagli economisti) che lega la quantità di prodotto finito q alle quantità x e y di fattori produttivi impiegati, in quanto la quantità q può essere ottenuta con diverse combinazioni di A e B .

Se i costi per unità del fattore A e del fattore B sono rispettivamente p_1 e p_2 , il costo totale relativo alla produzione della quantità q di prodotto è: $C = p_1 \cdot x + p_2 \cdot y$.

Si possono presentare quindi i seguenti semplici problemi :

1° problema : Costo totale relativo alla produzione congiunta di due beni

Un'impresa produce due beni A e B ed il costo totale della produzione congiunta è:

$$C(x_1, x_2) = 6000 + 20x_1 + 10x_2 - 0,08x_2^2;$$

dove x_1 ed x_2 indicano le quantità prodotte di A e B . Vogliamo calcolare il costo complessivo che si sostiene per produrre $x_1=50$ di A e $x_2=80$ di B . Si ha subito che:

$$C(50;80) = 6000 + 20 \cdot 50 + 10 \cdot 80 - 0,08 \cdot 6400 = 7288$$

2° problema : Espressione analitica della funzione che esprime il guadagno complessivo relativo alla produzione congiunta di due beni.

Basta ricordare che
Assegnato $p_1(x_1)$ e $p_2(x_2)$;

$$R(x_1;x_2)= p_1(x_1)*x_1+p_2(x_2)*x_2;$$

$$G(x_1;x_2)=R(x_1;x_2)-C(x_1,x_2)$$

Problema molto più interessante è invece quello per la determinazione del massimo profitto per un'impresa.

Infatti, uno degli obiettivi di un'impresa che produce più beni è quello di determinare il livello di produzione dei singoli beni per massimizzare il profitto. In relazione alle condizioni di vendita l'impresa può operare in un mercato di libera concorrenza, o di monopolio, o di oligopolio; può vendere in mercati diversi o in un solo mercato, a prezzi uguali o diseguali ,etc.

Se il regime è di *concorrenza perfetta* i prezzi sono fissi, indipendenti dalla quantità richiesta; se si opera in condizioni di *monopolio* i prezzi non sono fissi, ma dipendono dalla funzione di domanda dei singoli prodotti.

ESEMPIO

Un'impresa produce due beni e li vende in un mercato di libera concorrenza ai prezzi $p_1 = 800$, $p_2 = 1.100$

Il costo congiunto di produzione dei due beni , nelle quantità x e y è espresso dalla funzione

$$c(x,y) = x^2+xy +2y^2$$

Determinare per quale combinazione dei fattori produttivi il profitto è massimo