Premessa : La seguente dispensa non vuole essere un trattamento esauriente dell'argomento, ma soltanto un supporto agli studenti del quinto anno di studio di un istituto tecnico industriale.

Gli integrali indefiniti

Definizione Una funzione F(x) si dice primitiva di f(x) in un intervallo I se F'(x) = f(x) per ogni x appartenente ad [a,b].

Ad esempio **F(x) = cos(x)** è una primitiva di **f(x) = sen(x)** su tutta la retta reale, infatti la derivata di **sen (x)** è proprio **cos (x).**

Ma anche la funzione **G(x) = 7+sen (x**) è un primitiva di **cos (x)**, infatti la derivata di **7+sen(x)** è ancora **cos(x).**

Dall'esempio si intuisce che non esiste un'unica primitiva di una funzione assegnata, ma che le primitive di una stessa funzione sono infinite e che differiscono tutte per una costante:

Teorema "Se F(x) è una primitiva di f(x) in un intervallo [a,b], allora la più generale primitiva G(x) di f(x) in [a,b] è F(x) + c, ove c è una costante qualunque."

Il teorema si dimostra immediatamente con un corollario del *Teorema di Lagrange*.
Siano infatti F(x) e G(x) due primitive di f(x) in [a,b], e sia H(x) = F(x) – G(x).
La funzione H(x) è derivabile in [a,b] e
H'(x) = F'(x)-G'(x) = f(x) – f(x) = 0 per ogni x in [a,b].
Ma allora H(x) è costante in [a,b] e quindi F(x) e G(x) differiscono per una costante.

La famiglia delle primitive di una stessa funzione f(x) si usa indicare con il simbolo

$$\int f(x)dx$$

e si legge *integrale indefinito di f(x).*

La funzione f(x) si chiama *funzione integranda* (da integrarsi) e dx per il momento altro non è che un simbolo che indica la variabile rispetto a cui si integra la funzione integranda, ovvero come funzione di x.
Ad esempio la famiglia delle primitive di

$$y = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{è} \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tagx + c;$$

altro esempio: la famiglia delle primitive di $y = x^2$ è

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$,

infatti la derivata di $y = \frac{x^3}{3} + c$ è proprio $y = x^2$.

Dunque la famiglia delle primitive di $y = x^2$ è la famiglia delle cubiche $y = \frac{x^3}{3} + c$, e tali cubiche differiscono tutte tra di loro per una costante. Dal punto di vista grafico conoscendo il grafico di una delle funzioni della famiglia, si ottengono i grafici di tutte le altre per traslazione come si può vedere in figura

Da quanto detto si capisce che l'operatore integrale indefinito è "quasi" l'operatore inverso dell'operatore derivata nel senso che partendo da una funzione f(x) derivabile, applicando l'operatore derivata otteniamo la funzione f'(x) e applicando a quest'ultima l'operatore integrale indefinito non si ottiene la funzione di partenza f(x) ma si ottiene f(x) a meno di una costante.

Esempio:

D tang x $= 1 + \text{tang}^2 x$,

$\int (1 + \text{tang}^2 x)\, dx = \text{tang}\, x + c$.

Questa osservazione ci permette di calcolare la famiglia delle primitive di alcune funzioni elementari semplicemente leggendo "al contrario" la seguente tabella delle derivate:

y = f(x)	**y = f'(x)**	**y =f(x)**	**y = f'(x)**	**y = f(x)**	**y = f'(x)**
$y = k,\ k\in \mathbf{R}$	$y = 0$	$y = 1/x$	$y = -1/x^2$	y = senx	y = cosx
$y = x$	$y = 1$	y = log x	$y = 1/x$	y = cosx	y = -senx
$y = x^2$	$y = 2x$	$y = \log_a x$	$y = (\log_a e)/x$	y = tgx	$y = 1 + tg^2x$
$y = x^\alpha$	$y = \alpha x^{\alpha-1}$	$y = e^x$	$y = e^x$	y = cotgx	$y = -1/sen^2x$
$y = \sqrt{x}$	$y = ½\sqrt{x}$	$y = a^x$	$y = a^x \log a$	$y = x^{1/3}$	$y = (x^{-2/3})/3$

ottenendo così la tabella delle famiglie di primitive:

y = F(x)+c	y = f(x)	y =F(x)+c	y = f(x)	y = F(x)+c	y = f(x)
y = c, $c\in \mathbf{R}$	y = 0	y =(1/x) +c	y = $-1/x^2$	y =c + senx	y = cosx
y = x +c	y = 1	y =c+ log|x|	y = 1/x	y =c + cosx	y = -senx
y = x^2 +c	y = 2x	y c+$\log_a$|x|	y = ($\log_a$e)/x	y =c + tgx	y =1+ tg^2x
y = x^α +c	y = $\alpha x^{\alpha-1}$	y = e^x+c	y = e^x	y =c + cotgx	y = $-1/sen^2x$
y =√x +c	y = ½√x	y = a^x+c	y = a^xloga	y =c + $x^{1/3}$	y =$(x^{-2/3})/3$

Si osserva che la famiglia delle primitive di y = 1/x è y = log|x| +c ;
infatti se x > 0 y = log|x| +c coincide con y = log x+c e la sua derivata è y = 1/x, mentre se x < 0 la funzione y = log| x | +c coincide con y = log(–x)+c e la sua derivata è y = -1/(-x) ovvero y = 1/x.

Quindi la derivata di y = log| x | +c è sempre y = 1/x per ogni x reale diversa da zero.
Sempre ricordando le derivate delle funzioni elementari e loro inverse, possiamo dire che

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c,$$

e

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsenx + c.$$

Come l'operatore derivata anche l'operatore integrale indefinito è un operatore **lineare:**

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \text{ , con } k \in \mathbf{R}.$$

Pertanto la famiglia delle primitive di y = $7x^2$-5senx è

$$\int (7x^2 - 5senx)dx = 7\int x^2dx + 5\int -senxdx = \frac{7}{3}\int 3x^2dx + 5\int -senxdx = \frac{7}{3}x^3 + 5\cos x + c$$

Dalla tabella delle famiglie delle primitive di alcune funzioni elementari e dalle proprietà di linearità dell'operatore integrale indefinito discende la seguente tabella degli integrali indefiniti:

$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \alpha \neq (-1)$	$\int \frac{1}{x}dx = \log\|x\| + c$	$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\log a} + c$
$\int senx dx = -\cos x + c$	$\int \cos x dx = senx + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$
$\int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = arcsenx + c$

Utilizzando la formula di derivazione di funzione composta si ha la seguente tabella di derivate:

$D(f(x))^{\alpha} = \alpha\,(f(x))^{\alpha-1} f'(x)$	$D\log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$De^{f(x)} = e^{f(x)} f'(x)$
$Da^{f(x)} = a^{f(x)} f'(x)\log a$	$D\log_a(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$	$Dsenf(x) = \cos f(x) f'(x)$
$D\arctan f(x) = \frac{1}{1+f^2(x)} f'($	$Darcsenf(x) = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x)$	$D\cos f(x) = -senf(x) f'(x)$

da cui discende quindi la seguente tabella di famiglie di primitive:

$\int f^{\alpha}(x) f'(x)dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log\|f(x)\| + c$
$\int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a} + c$	$\int f'(x)\cos f(x)dx = senf(x) + c$
$\int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + c$	$\int f'(x)senf(x)dx = -\cos f(x) + c$
$\int \frac{1}{1+f^2(x)} f'(x)dx = \arctan f(x) + c$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x)dx = arcsenf(x) + c$

(Se deriviamo le famiglie di primitive scritte in tabella, ovvero i secondi membri di ogni formula, si ottiene in ciascun caso la rispettiva funzione integranda in accordo con la definizione di primitiva)

Vediamo qualche esempio di calcolo di primitive:

$$\int \tan x dx = \int \frac{senx}{\cos x} dx = -\log|\cos x| + c.$$

Tutte le volte che sotto il simbolo di integrale compare il quoziente di due funzioni, e il numeratore è la derivata del denominatore siamo di fronte alla famiglia delle primitive del logaritmo del valore assoluto del denominatore cioè $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)| + c$.

Altro esempio:

$$\int \frac{x-3}{x^2+1} dx = \int \frac{x}{x^2+1} - 3\int \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} - 3\int \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 3\arctan x + c.$$

Nell'esempio precedente si osserva che x non è la derivata di x^2+1, però se moltiplichiamo e dividiamo per 2 e ciò è possibile per la linearità dell'operatore integrale indefinito, otteniamo che il numeratore 2x è la derivata del denominatore x^2+1.
In altri casi conviene aggiungere e togliere una stessa costante, esempio:
se ricerchiamo la famiglia di primitive di tang^2 x , ci accorgiamo che non conosciamo alcuna funzione che abbia come derivata tang^2 x ma nella tabella delle derivate troviamo 1+ tang^2 x che è la derivata della tangente per cui utilizzando le proprietà di linearità possiamo scrivere:

$$\int \tan^2 x dx = \int (\tan^2 x + 1 - 1) dx = \int (1 + \tan^2 x) dx - \int 1 dx = \tan x - x + c.$$

In altri casi conviene scrivere la funzione integrando in maniera opportuna:

esempio:

$$\int \frac{x+1}{x^2} dx = \int \left(\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int x^{-2} dx = \log|x| - x^{-1} + c = \log|x| - \frac{1}{x} + c$$

.

Altro esempio:

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^7}\, x^4}{\sqrt[5]{x}} dx = \int \frac{x^{\frac{7}{3}} x^4}{x^{\frac{1}{5}}} dx = \int x^{\frac{7}{3}} x^4 x^{\frac{-1}{5}} dx = \int x^{\frac{92}{15}} dx = \frac{15 x^{\frac{107}{15}}}{107} + c.$$

Ancora

$$\int \frac{1}{-x+3} dx = -\int \frac{-1}{-x+3} dx = -\log|-x+3| + c.$$

Mentre

$$\int sen^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} sen 2x + c$$

per trovare la famiglia delle primitive di y = sen^2 x abbiamo prima usato le formule di bisezione per abbassare di grado la funzione seno anche se l'argomento si è raddoppiato e poi ci siamo messi nelle condizioni di usare la formula: $\int f'(x)\cos f(x) dx = sen f(x) + c$; essendo nel nostro caso f(x) = 2x abbiamo moltiplicato e diviso per la costante 2.
Se invece si ha da ricercare le seguenti primitive:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$$

si osserva che possiamo metterci nelle condizioni di usare $\int f^{\alpha}(x) f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$ scrivendo

$$\int x\sqrt{1-x^2}\, dx = \int x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{2}\int -2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{-1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{-1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

nel nostro caso specifico f(x) = 1- x^2 ed α = ½.

Se invece si ha da ricercare le seguenti primitive:

$\int \frac{\log x}{x} dx$, si osserva che questa volta il numeratore non è la derivata del denominatore e non potrà esserlo neppure moltiplicandolo o aggiungendo una costante opportuna, per cui va scritta la funzione integrando in altro modo e veder se ci sono altre formule in tabella da poter applicare:

$$\int \frac{\log x}{x} dx = \int \frac{1}{x}\log x dx.$$

Adesso sotto il simbolo di integrale indefinito c'è il prodotto di due funzioni di cui una la derivata dell'altra, pertanto la formula da usare è sempre $\int f'(x) f^{\alpha}(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$ con α =1, $\int \frac{\log x}{x} dx = \int \frac{1}{x}\log x dx = \frac{\log^2 x}{2} + c$.

Mentre se avessimo avuto da ricercare le primitive di $y = \frac{1}{x\log x}$ si può scrivere:

$$\int \frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x}xdx = \log\log x + c \cdot$$

Per avere conferma della corretta applicazione delle tecniche di integrazione basta riderivare la famiglia delle primitive, in ogni caso si dovrà riottenere la funzione integranda.

A questo punto possiamo rispondere ad uno dei quesiti posto all'inizio del capitolo:
Se consideriamo un punto materiale che si muove su una retta con una velocità funzione del tempo v(t) = t^3 + 7t (naturalmente tutto espresso nelle relative unità di misura ad esempio m/s) e se conosciamo la sua posizione iniziale (cioè al tempo zero) per esempio s(0) = 5 (m) , allora possiamo conoscere la sua posizione nel generico istante t. Basta ricordarsi che la velocità è la derivata dello spazio rispetto al tempo, cioè che
s'(t) = v(t) = t^3 + 7t.
Per trovare la funzione spazio si deve fare l'operazione "inversa" della derivazione cioè

ricercare le primitive della funzione s'(t) = t^3 + 7t,

$$s(t) = \int (t^3 + 7t)dt = \frac{t^4}{4} + 7\frac{t^2}{2} + c\,,$$

tra tutte queste funzioni si deve trovare quella che soddisfa la condizione s(0) = 5, cioè che al tempo t = 0 lo spazio percorso era 5 (nelle rispettive unità di misura).
Sostituendo t = 0 nella famiglia delle primitive si determina la costante c e quindi quella primitiva che soddisfa la condizione iniziale.
Ovvero 5 = 0 + c, cioè

$$s(t) = \frac{t^4}{4} + 7\frac{t^2}{2} + 5\ .$$

Quello ora enunciato è un esempio di

Problema di Cauchy

ovvero si assegna un'equazione che coinvolge la derivata di una funzione e che chiameremo equazione differenziale insieme a delle condizioni che chiameremo condizioni iniziali a cui deve soddisfare la " funzione soluzione".

Altro esempio di problema di Cauchy:

"Tra tutte le primitive di $y = 5^{4x} - 2x$ si trovi quella passante per il punto P(0,6)".
Dobbiamo trovare tutte le funzioni che hanno per derivata $5^{4x} - 2x$, cioè risolvere l'equazione differenziale $f'(x) = 5^{4x} - 2x$, ovvero calcolare

$$\int 5^{4x} - 2x dx = \frac{1}{4}\int 4(5^{4x})dx - \int 2x dx = \frac{1}{4}\frac{5^{4x}}{\log 5} - x^2 + c$$

e poi tra tutte le funzioni

$$f(x) = \frac{1}{4}\frac{5^{4x}}{\log 5} - x^2 + c$$

Trovare quella che passa per P(0,6), cioè che soddisfa

$6 = \frac{1}{4}\frac{5^0}{\log 5} - 0 + c$, ovvero $c = 24\log 5$.

Pertanto la funzione che risolve il problema di Cauchy assegnato è

$$f(x) = \frac{1}{4}\frac{5^{4x}}{\log 5} - x^2 + 24\log 5 .$$

Vediamo adesso dei metodi di integrazione indefinita

Integrazione di funzioni razionali fratte.

Consideriamo integrali della forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ ove P(x) e Q(x) sono due polinomi rispettivamente di grado n ed m.

Possiamo indicare i passi da seguire per arrivare a determinare la famiglia delle primitive:

1. **Se il grado del numeratore n è maggiore o uguale al grado del denominatore conviene fare la divisione tra i polinomi in modo da ricondurci ad una frazione in cui il numeratore ha grado inferiore rispetto al denominatore oltre ad una funzione polinomiale**.

Esempio:

$$\int \frac{x^2 + 5x - 3}{x+1}dx = \int (x + 4 - \frac{7}{x+1})dx = \int (x+4)dx - 7\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2} + 4x - 7\log|x+1| + c$$

2. **Fattorizzare il denominatore nel prodotto di fattori di primo e secondo grado irriducibili.**
3. **Se il denominatore è fattorizzato nel prodotto di fattori lineari distinti si scrive la frazione come somma di altre frazioni ciascuna delle quali ha come denominatore uno solo dei fattori e come numeratore ciascuno una costante da determinarsi con il principio di identità dei polinomi.**

Esempio: $\int \frac{3x}{(x-4)(x+1)}dx = \int (\frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x+1)})dx = \int \frac{A}{(x-4)}dx + \int \frac{B}{(x+1)}dx$, A e B si determinano imponendo che le due funzioni integrande coincidano $\frac{3x}{(x-4)(x+1)} = \frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-4)}{(x-4)(x+1)} = \frac{(A+B)x+A-4B}{(x-4)(x+1)}$.

Le due frazioni hanno i denominatori uguali e quindi anche i numeratori devono essere uguali, cioè $3x = (A+B)x + A - 4B$.

Ma per il principio di identità dei polinomi, due polinomi sono uguali se hanno gli stessi coefficienti, quindi

$$\begin{cases} 3 = A + B \\ 0 = A - 4B \end{cases}$$

Sistema lineare di due equazioni in due incognite si risolve con i metodi di somma e sottrazione, oppure confronto o sostituzione.
Si ottiene B=3/5 ed A = 12/5.
Si sostituisce i valori trovati per le costanti A e B e si integra:

$$\int \frac{3x}{(x-4)(x+1)}dx = \int \left(\frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x+1)}\right)dx = \int \frac{\frac{12}{5}}{(x-4)}dx + \int \frac{\frac{3}{5}}{(x+1)}dx = \frac{12}{5}\log|x-4| + \frac{3}{5}\log|x+1|$$
$$+ c$$

4. **Se invece almeno uno dei fattori lineari si ripete, allora è necessario scrivere la funzione razionale di partenza come somme di frazioni che hanno come denominatore i fattori lineari e quello ripetuto deve comparire con potenze crescenti fino al numero delle ripetizioni, mentre il numeratore è sempre una costante.**

Esempio:

$$\int \frac{x^2+x}{(x-4)(x+1)^2}dx = \int \left(\frac{A}{(x-4)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}\right)dx = \int \frac{A(x+1)^2 + B(x-4)(x+1) + C(x-4)}{(x-4)(x+1)^2}dx =$$
$$\int \frac{A(x^2+2x+1) + B(x^2-3x-4) + C(x-4)}{(x-4)(x+1)^2}dx = \int \frac{2Ax^2 + (2A-3B+C)x + A - 4B - 4C}{(x-4)(x+1)^2}dx$$

Procedendo come nell'esempio precedente, si ha per il principio d identità dei polinomi

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 2A - 3B + C = 1 \\ A - 4B - 4C = 0 \end{cases}$$

da cui A=1/2, B=1/32 e C =3/32, sostituendo si ha

$$\int \frac{x^2+x}{(x-4)(x+1)^2}dx = \int \left(\frac{1/2}{(x-4)} + \frac{1/32}{(x+1)} + \frac{\frac{3}{32}}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{1}{2}\log|x-4| + \frac{1}{32}\log|x+1| + \frac{3}{32}\int (x+1)^{-2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\log|x-4| + \frac{1}{32}\log|x+1| + \frac{3}{32}\frac{(x+1)^{-1}}{-1} + c = \frac{1}{2}\log|x-4| + \frac{1}{32}\log|x+1| - \frac{3}{32}\frac{1}{x+1} + c$$

5. Se nella fattorizzazione del denominatore compare un fattore di secondo grado irriducibile ovvero un polinomio di secondo grado il cui discriminante è minore di zero, si scrive sempre la funzione razionale come somma di frazioni che hanno come denominatori i fattori della decomposizione del denominatore ed al numeratore una costante se il denominatore è lineare altrimenti un generico polinomio di secondo grado.

Esempio:

$$\int \frac{2x-7x^2}{(5-x)(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{A}{(5-x)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}\right)dx = \int \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(5-x)}{(5-x)(x^2+1)}dx =$$

$$\int \frac{Ax^2+A+5Bx+5C-Bx^2-Cx}{(5-x)(x^2+1)}dx = \int \frac{(A-B)x^2+(5B-C)x+A+5C}{(5-x)(x^2+1)}dx$$

Dal principio di identità dei polinomi segue

$$\begin{cases} A-B=-7 \\ 5B-C=2 \\ A+5C=0 \end{cases}$$

da cui B = 17/26, A = -165/26 e C = 33/26.
Sostituendo si ha

$$\int \frac{2x-7x^2}{(5-x)(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{\frac{-165}{26}}{(5-x)} + \frac{1}{26}\frac{17x+33}{(x^2+1)}\right)dx = \frac{165}{26}\int \frac{-1}{(5-x)}dx + \frac{17}{26}\int \frac{x}{x^2+1}dx + \frac{33}{26}\int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

$$\frac{165}{26}\log|5-x| + \frac{17}{52}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{33}{26}\arctan x + c = \frac{165}{26}\log|5-x| + \frac{17}{52}\log(x^2+1) + \frac{33}{26}\arctan x + c$$

Dagli esempi fatti si capisce che l'integrazione di una funzione razionale può dare come risultato ancora una funzione razionale,e/o un logaritmo,e/o un arcotangente.
Concludiamo l'integrazione delle funzioni razionali con altri due esempi.
In generale se abbiamo un integrale del tipo:

$\int \frac{1}{x^2+a}dx$ con a > 0, e quindi il denominatore è una somma di quadrati, procediamo nel modo seguente. Se a = 1 , l'integrale è immediato

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x + c,$$

altrimenti se a è un qualunque numero reale positivo , si pone in evidenza a e si scrive

$$\int \frac{1}{x^2+a}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{a}})^2+1}dx \quad .1$$

Si ricorda che $D\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt{a}})^2}(\frac{1}{\sqrt{a}})$, trattandosi di funzione composta, per cui

$$\int \frac{1}{x^2+a}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{a}})^2+1}dx = \frac{\sqrt{a}}{a}\int \frac{1}{(\frac{x}{\sqrt{a}})^2+1}(\frac{1}{\sqrt{a}})dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} + c.$$

Dunque

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} + c, a > 0}$$

Più in generale

$$\boxed{\int \frac{1}{bx^2+a}dx = \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + c, a > 0, b > 0}$$

Pertanto $\int \frac{1}{x^2+5}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x}{\sqrt{5}} + c.$

Nel caso in cui si abbia un integrale del tipo

$\int \frac{1}{x^2+x+3}dx$, in cui il discriminante del polinomio x^2+x+3 è 1-12 = -11 <0 si cerca di scrivere il polinomio come somma di quadrati

$$x^2+2\frac{1}{2}x+3 = x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+3 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}$$

E quindi

$$\int \frac{1}{x^2+x+3}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{11}{4}}dx = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{11}} + c = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\frac{(2x+1)}{\sqrt{11}} + c.$$

Essendo l’operatore integrale indefinito “quasi l’operatore inverso della derivazione” è chiaro che ad ogni regola di derivazione corrisponde una regola di integrazione.

Integrazione per parti

Ricordiamo la regola di derivazione del prodotto nel caso di funzioni derivabili

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Abbiamo un'uguaglianza tra due funzioni (quella scritta al primo membro dell'uguaglianza e quella scritta al secondo membro) per cui se ricerchiamo la famiglia delle primitive dei due membri, tali famiglie devono coincidere.
La famiglia delle primitive di D(f(x)g(x)) è per definizione la famiglia delle funzioni che hanno come derivata D(f(x)g(x)) e quindi una funzione della famiglia è proprio f(x)g(x) , le altre si ottengono aggiungendo una costante.
La famiglia delle primitive del secondo membro è
$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx$, e per le proprietà di linearità possiamo scrivere

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Quindi le due famiglie dovendo coincidere , si ha

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx,$$

ovvero

Formula di integrazione per parti

$$\boxed{\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx}$$

Tale formula si ricorda bene se pensiamo che f'(x)dx è un fattore differenziale e g(x) è un fattore finito. Per cui l'integrale del prodotto di un fattore finito per un differenziale è uguale al prodotto dei due fattori finiti meno l'integrale di un prodotto in cui si scambiano i ruoli tra finito e differenziale.
Questa formula dovrebbe ricordare che come in derivazione **non è vero** che la derivata di un prodotto è il prodotto delle derivate così l'integrale indefinito di un prodotto **non è** il prodotto degli integrali.

Esempi:
$\int xe^x dx$, sotto il segno di integrale compare il prodotto di due funzioni, allora si può pensare di applicare il metodo di integrazione per parti.
Dobbiamo scegliere chi tra le due funzioni è il fattore finito e chi quello differenziale.
A volte la scelta è obbligata, altre, come in questo caso sembra indifferente, ma attenzione, facendo una certa scelta invece di un'altra l'integrale al secondo membro può essere più complicato di quello di partenza.
Nel caso specifico indichiamo con g(x) = x e f'(x) = e^x , allora g'(x) = 1 e f(x) = e^x (come f(x) si prende una qualunque primitiva di e^x) e l'integrale diventa

$\int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1) + c$.

Se avessimo fatta l'altra scelta, cioè g(x) = e^x e f'(x) = x, allora g'(x) = e^x e f(x) = $x^2/2$ e l'integrale diventerebbe

$\int xe^x dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$; al secondo membro abbiamo un'integrale più complicato di quello di partenza: invece di avere un polinomio di primo grado per un'esponenziale abbiamo un polinomio di secondo grado per un'esponenziale.

Se abbiamo $\int (x^2+3x)e^x dx$, per arrivare a conoscere la famiglia delle primitive occorre applicare la formula di integrazione per parti due volte ed ogni volta conviene scegliere il polinomio come fattore finito in modo da abbassare il grado del polinomio ad ogni applicazione della formula di integrazione per parti.

$\int (x^2+3x)e^{5x} dx = (x^2+3x)\frac{e^{5x}}{5} - \int (2x+3)\frac{e^{5x}}{5}dx$,

nella formula precedente si è posto $g(x) = x^2 + 3x$ e $f'(x) = e^{5x}$ per cui g'(x) = 2x +3 e $f(x) = \frac{e^{5x}}{5}$. Come si vede l'integrale da calcolare è più semplice essendo l'esponenziale moltiplicato per un polinomio di primo grado. Riapplichiamo la formula di integrazione per parti a

quest' ultimo integrale scegliendo, come abbiamo detto $g(x) = 2x+3$ e $f'(x) = \frac{e^{5x}}{5}$

per cui g'(x) = 2 e $f(x) = \frac{e^{5x}}{25}$. g(x) = $x^2 + 3x$, quindi si ha

$$\int (x^2+3x)e^{5x} dx = (x^2+3x)\frac{e^{5x}}{5} - \int (2x+3)\frac{e^{5x}}{5}dx = (x^2+3x)\frac{e^{5x}}{5} - ((2x+3)\frac{e^{5x}}{25} - \int 2\frac{e^{5x}}{25}dx) =$$

$$(x^2+3x)\frac{e^{5x}}{5} - (2x+3)\frac{e^{5x}}{25} + 2\frac{e^{5x}}{125} + c = \frac{e^{5x}}{125}(25x^2 + 75x - 10x - 15 + 2) + c =$$

$$\frac{e^{5x}}{125}(25x^2 + 65x - 13) + c.$$

Derivando ancora si ottiene la funzione integranda.

Il metodo ora illustrato si applica anche nel caso di integrali del tipo $\int P(x) senx dx$, ove P(x) è un polinomio di grado assegnato.

Nel caso in cui sotto il segno di integrale si ha il prodotto di una funzione trigonometrica tipo seno o coseno per un'esponenziale, si applica due volte la formula di integrazione per parti avendo l'accorgimento di fare sempre lo stesso tipo di scelta per il fattore finito (ad esempio la funzione trigonometrica in entrambi i casi).

Esempio

$$\int e^x senxdx = e^x senx - \int e^x \cos x dx = e^x senx - (e^x \cos x - \int e^x (-senx)dx) =$$

$$e^x senx - e^x \cos x - \int e^x senxdx.$$

L'avere applicato due volte la formula di integrazione per parti ci ha portato allo stesso integrale al secondo membro, però con un coefficiente diverso rispetto allo stesso integrale scritto al primo membro. Pertanto sommando ad ambo i membri lo stesso integrale si ha

$$2\int e^x senxdx = e^x senx - e^x \cos x + c.$$

da cui dividendo per 2 si ha il risultato

$$\boxed{\int e^x senxdx = \frac{e^x senx - e^x \cos x}{2} + c.}$$

Una costante divisa per due è sempre una costante.
Gli integrali che dopo un certo numero di reiterazioni della danno luogo allo stesso integrale con coefficiente diverso si chiamano **ciclici**.
Altro esempio:

$$\int \log x dx,$$

in questo caso la funzione integrando è il solo logaritmo, ma quando può essere utile si può sempre pensare la funzione integrando come il prodotto di 1 per il logaritmo e quindi applicare la formula di integrazione per parti. Naturalmente questa volta la scelta per il fattore differenziale è obbligata: f′(x) = 1 e g(x) = log x , e quindi f(x) = x e g′(x) = 1/x e l'integrale diventa

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + c.$$

Lo stesso metodo si applica per

$\int arcsenxdx$, lo si lascia per esercizio.

Integrazione per sostituzione

$$\boxed{(\int f(x)dx)\Big|_{x=g(t)} = \int f'(g(t))g'(t)dt.}$$

Ove f(x) è una funzione continua in un intervallo I e x = g(t) è una funzione derivabile che ha come codominio l'intervallo I.

Vediamo che le famiglie di funzioni scritte al primo e secondo membro altro non sono che la stessa famiglia.

Al secondo membro è rappresentata la famiglia delle primitive di $f'(g(t))g'(t)$, al primo membro sono rappresentate delle funzioni composte , ovvero le primitive di f(x) calcolate per x = g(t).

Calcoliamo la derivata rispetto a t di questa famiglia di funzioni composte. Per la regola di derivazione delle funzioni composte si ha $f'(g(t))g'(t)$. Pertanto le due famiglie avendo la stessa derivata coincidono.

Esempio:

$\int \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + 3}dx$, in questo integrale la sostituzione da fare sembra t = e^x , ovvero x = log t .

A questo punto prima di sostituire conviene calcolarsi dx = g′(t) dt che è proprio il differenziale della funzione g(t), nel nostro caso dx = dt/t.
Dunque

$$(\int \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + 3}dx)\Big|_{x=\log t} = \int \frac{t - t^2}{t+3}\frac{1}{t}dt = \int \frac{1-t}{t+3}dt = -\int \frac{t-1}{t+3}dt = -\int \frac{t+3-3-1}{t+3}dt =$$

$$-\int \frac{t+3-4}{t+3}dt = -\int 1dt + 4\int \frac{1}{t+3}dt = -t + 4\log|t+3| + c.$$

Il numeratore della funzione razionale aveva lo stesso grado del denominatore, ma questa volta abbiamo potuto evitare di fare la divisione tra polinomi usando degli artifici come aggiungere e togliere 3.
Se vogliamo scrivere la famiglia delle primitive come funzione di x basta sostituire t = e^x e si ottiene

$$\int \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + 3}dx = -e^x + 4\log(e^x + 3) + c.$$

Sarebbe scorretto scrivere

$$\int \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + 3}dx = -t + 4\log|t+3| + c.$$

Infatti il primo membro è una famiglia di funzioni della variabile x ed il secondo membro è una famiglia di funzioni della variabile t e quindi non è possibile che valga l'uguaglianza. Le scritture corrette sono

$$(\int \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + 3}dx)\Big|_{x=\log t} = -t + 4\log|t+3| + c$$

oppure

$$\int \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + 3}dx = -e^x + 4\log(e^x + 3) + c.$$

Altro esempio, si cerchino tutte le primitive di $\sqrt{1-x^2}$.

$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$; per risolvere l'integrale occorre trovare una sostituzione che "semplifichi" la radice, ovvero che faccia sì che 1- x^2 sia un quadrato perfetto, e le uniche sostituzioni che fungono allo scopo sono o x = sen t o x = cos t.

Poniamo x = sen t , allora dx = cos t dt e quindi

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx\Big|_{x=sent} = \int \sqrt{1-sen^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt$$

(il seno è invertibile ad esempio se x∈ [-π/2 , π/2] ed in questo caso il coseno è non negativo)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx\Big|_{x=sent} = \int \sqrt{1-sen^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}(\int 1 dt + \int \cos 2t dt) =$$

$$\frac{1}{2}(t + \frac{sen2t}{2}) + c = \frac{t}{2} + \frac{2sent\cos t}{4} + c = \frac{t}{2} + \frac{sent\cos t}{2} + c.$$

Se si vuole scrivere la famiglia delle primitive come funzione della variabile x si deve tener conto che x = sen t , $\cos t = \sqrt{1-sen^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ e che t = arcsen x, quindi sostituendo si ha

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{arcsenx}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c.$$