CONCETTO DI LIMITE DI UNA FUNZIONE REALE

Il **limite di una funzione** è uno dei concetti fondamentali dell'analisi matematica.

Tramite questo concetto viene formalizzata la nozione di funzione continua e di punto di discontinuità. Serve inoltre a definire la derivata ed è quindi basilare per tutto il calcolo differenziale.

Il limite di una funzione f in un punto x_0 indica il valore "a cui si avvicinano sempre di più" i valori della funzione quando viene calcolata in punti sempre più vicini ad x_0. Viene indicato con il simbolo

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Definizione

Limite di una funzione

Siano dati una funzione

$$f : X \to \mathbb{R}$$

definita su un sottoinsieme X della retta reale $\mathbb{R}$ ed un punto di accumulazione x_0 di X.

Un numero reale l è il **limite di $f(x)$ per x tendente a x_0** se la distanza fra $f(x)$ ed l è arbitrariamente piccola quando x si avvicina a x_0.

La distanza fra i punti è misurata usando il valore assoluto della differenza: quindi $| x - x_0 |$ è la distanza fra x e x_0 e $| f(x) - l |$ è la distanza fra $f(x)$ ed l. Il concetto di "arbitrariamente piccolo" è espresso formalmente con i quantificatori "per ogni" (quantificatore universale) ed "esiste" (quantificatore esistenziale).

Formalmente, l è limite se

per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste un altro numero reale positivo δ tale che

$| f(x) - l | < \varepsilon$ per ogni x in X con $0 < | x - x_0 | < \delta$.

In questo caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Una definizione equivalente che usa gli intorni è la seguente: l è limite se

per ogni intorno U di l in $\mathbb{R}$ esiste un intorno V di x_0 in $\mathbb{R}$ tale che *f*(*x*) appartiene a *U* per ogni $x \neq x_0$ in $V \cap X$.

Il valore x_0 non è necessariamente contenuto nel dominio di *f*. Il valore è comunque escluso nella definizione di limite, poiché il limite deve dipendere soltanto dai valori di *f* in punti arbitrariamente vicini ad x_0 ma non dal valore che *f* assume in x_0.

Estensione al caso infinito

La definizione di limite viene normalmente estesa per considerare anche i casi in cui x_0 e/o *l* sono infiniti.

La funzione *f* ha **limite infinito** $l = +\infty$ in un punto finito x_0 se

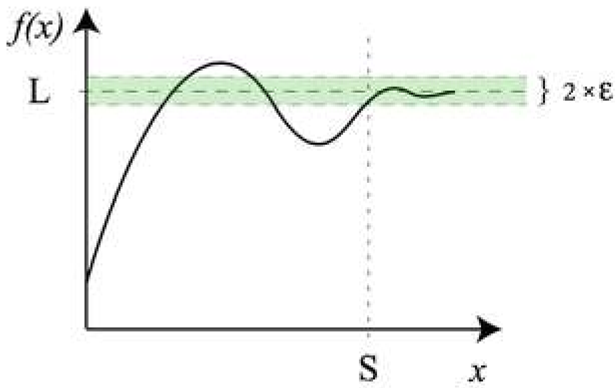
per ogni <u>numero reale</u> $N > 0$ esiste un altro numero reale $\delta > 0$ tale che

$f(x) > N$ per ogni *x* in *X* con $0 < | x - x_0 | < \delta$.

In questo caso si scrive

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Analogamente si definisce il limite $-\infty$ sostituendo $f(x) > N$ con $f(x) < -N$.



Il limite per $x \to +\infty$ è *L*.

Per definire il limite per $x_0 = +\infty$, è ancora necessario che $x_0 = +\infty$ sia "punto di accumulazione" per il dominio *X*: questo si traduce nella richiesta che *X* contenga valori arbitrariamente grandi, cioè che il suo <u>estremo superiore</u> sia infinito:

$$\sup X = +\infty.$$

In questo caso, un numero finito *l* è **limite** di *f* per $x \to +\infty$ se:

Per ogni <u>numero reale</u> $\varepsilon > 0$ esiste un altro numero reale $S > 0$ tale che

$| f(x) - l | < \varepsilon$ per ogni *x* in *X* con $x > S$.

In questo caso si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l.$$

Analogamente si definisce il limite per $x \to -\infty$, sostituendo $x > S$ con $x < -S$.

Resta quindi da esaminare il caso in cui entrambi x_0 ed l sono infiniti. La funzione f ha limite $+\infty$per $x \to +\infty$se

Per ogni numero reale $N > 0$ esiste un altro numero reale $S > 0$ tale che

$f(x) > N$ per ogni x in X con $x > S$.

In questo caso si scrive

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Si definiscono analogamente i casi in cui $x_0 = -\infty$e/o $l = -\infty$.

Terminologia

Se una funzione ha limite zero in x_0, questa si dice **infinitesima** in x_0. D'altro canto, se ha limite $\pm\infty$ è detta **divergente**.

Se x_0 è contenuto nel dominio X di f, e se vale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

allora la funzione è continua in x_0. La nozione di continuità è molto importante in matematica: intuitivamente, una funzione continua in x_0 ha il grafico che "non fa salti" intorno al punto, ma può essere disegnato manualmente senza staccare mai la penna dal foglio. Altrimenti, la funzione ha in x_0 un punto di discontinuità.

Esempi

Sono qui elencati alcuni esempi.

- La funzione $f(x) = x^2$ è continua in $x_0 = 3$, perché il suo valore $f(3) = 3^2 = 9$ coincide con il valore ottenuto come limite:

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9.$$

- Quanto x diventa molto grande, il valore $1 / x$ diventa arbitrariamente piccolo, e tende quindi a zero:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

- Quando x diventa molto grande, il valore x^3 diventa arbitrariamente grande, e tende quindi a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

Limite destro, sinistro, per eccesso, per difetto

Per avere informazioni più precise è a volte utile utilizzare i concetti di **limite destro** e **limite sinistro**, definiti tramite la nozione di *intorno destro* e *sinistro*.

Un *intorno destro* di un punto x_0 della retta estesa $\mathbb{R}^*$è un intervallo del tipo $[x_0,x_0 + r[$ con $r > 0$. Analogamente, un *intorno sinistro* è un intervallo del tipo $]x_0 - r,x_0]$. In particolare, gli intorni di $+\infty$sono tutti sinistri e quelli di $-\infty$sono destri.

A questo punto, sia

$$f : X \to \mathbb{R}$$

con x_0 punto di accumulazione per X. Un valore l della retta estesa è **limite destro** per f in x_0 se

Per ogni intorno U di l esiste un intorno destro V^+ di x_0 tale che

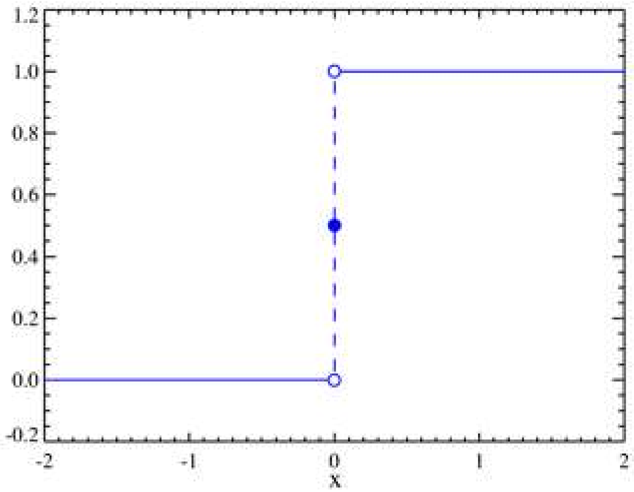
$f(x)$ appartiene a U per ogni x in $V^+ \cap X$.

Il limite sinistro è definito in modo analogo. I limiti sinistro e destro (se esistono) vengono descritti rispettivamente come

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x), \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Vale il risultato seguente:

Una funzione ha limite in x_0 se e soltanto se ha limite destro e sinistro, e questi due limiti coincidono.



La funzione gradino di Heaviside ha un salto in $x_0 = 0$, poiché i limiti sinistro e destro non coincidono.

Ad esempio, la funzione gradino f mostrata in figura ha limite sinistro e destro in $x_0 = 0$, ma questi non coincidono: quindi non ha limite in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1.$$

Le nozioni di **limite per difetto** e **per eccesso** vengono definite in modo analogo, sostituendo l'intorno U di l con intorni destri e sinistri. I limiti per difetto e per eccesso (se esistono) possono essere indicati con un piccolo abuso di linguaggio nel modo seguente:

$$l^+ = \lim_{x\to x0} f(x), \quad l^- = \lim_{x\to x0} f(x).$$

Proprietà di base

Limitatezza locale

Per il teorema di limitatezza locale, una funzione che ha limite finito in x_0 è limitata in un intorno di x_0, ovvero esistono un numero $K > 0$ ed un intorno V di x_0 tale che $| f(x) | < K$ per ogni x del dominio contenuto in V.

D'altra parte, una successione limitata in un intorno di x_0 non ha necessariamente limite in x_0: ad esempio la funzione gradino è ovunque limitata, ma non ha limite in zero.

Permanenza del segno

Per il teorema di permanenza del segno, se una funzione ha limite $l > 0$ strettamente positivo in x_0, allora assume valori strettamente positivi per ogni x sufficientemente vicino a x_0. In altre parole, esiste un intorno V di x_0 tale che $f(x) > 0$ per ogni x del dominio in V diversa da x_0.

Analogamente, una funzione che ha limite $l < 0$ strettamente negativo ha valori strettamente negativi per tutti gli x sufficientemente vicini a x_0. Una funzione che ha limite $l = 0$ può assumere vicino a x_0 valori di entrambi i segni (ad esempio la funzione $f(x) = x$ con $x_0 = 0$).

Confronto fra funzioni

Confronto fra due funzioni

Siano f e g due funzioni definite su un dominio X, con x_0 punto di accumulazione per X. Se $f(x) \geq g(x)$ per ogni x del dominio in un intorno V di x_0, e se entrambe le funzioni hanno limite in x_0, allora vale

$$\lim_{x \to x0} f(x) \geq \lim_{x \to x0} g(x).$$

Questo risultato è ottenuto applicando il teorema di permanenza del segno alla differenza $f - g$.

Teorema del confronto (o dei carabinieri)

Il teorema del confronto (o *dei carabinieri*) asserisce che una funzione "stretta fra due successioni" convergenti allo stesso limite converge anch'essa a questo limite. Formalmente, se f,g e h sono tre funzioni definite su un dominio X con punto di accumulazione x_0, tali che

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

per ogni $x \neq x_0$ del dominio in un intorno di x_0, e tali che

$$\lim_{x \to x0} f(x) = \lim_{x \to x0} h(x) = l$$

allora anche

$$\lim_{x \to x0} g(x) = l.$$

Viene detto "*dei carabinieri*" perché $f(x)$ ed $h(x)$ vengono immaginati come i due carabinieri che portano in cella $g(x)$

Operazioni con i limiti

Funzioni aventi lo stesso dominio possono essere sommate o moltiplicate. In molti casi è possibile determinare il limite della funzione risultante dai limiti delle singole funzioni.

Siano f e g due funzioni con lo stesso dominio X, e x_0 un punto di accumulazione per X. Se esistono i limiti

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1, \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$$

allora

1. $\lim_{x\to x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot l_1 \qquad \forall c \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$
3. $\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2$
4. $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l_1} \qquad \text{se } l_1 \neq 0$
5. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \qquad \text{se } l_2 \neq 0$

Alcune delle uguaglianze elencate sono estendibili ai casi in cui l_1 e/o l_2 sia infinito.

Forme Indeterminate

Nella matematica, e in particolare nel calcolo infinitesimale, le scritture

$$\frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad 0 \cdot \infty \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0 \qquad \infty - \infty$$

individuano le cosiddette **forme indeterminate**, collezioni di funzioni di una variabile reale esprimibili componendo (mediante una moltiplicazione, una divisione o un elevamento a potenza) due funzioni di variabile reale $f(x)$ e $g(x)$ aventi un determinato comportamento quando la variabile tende a un valore finito o infinito di aderenza per entrambi i domini delle funzioni.

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Consideriamo in particolare la prima delle forme sopra introdotte; la funzione

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

relativamente al tendere della variabile x ad un opportuno elemento x_0 dell'insieme dei reali esteso $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si attribuisce alla forma $\frac{0}{0}$ se $f(x)$ e $g(x)$ tendono entrambe a 0 quando x tende a x_0.

$$\lim_{x \to 49} \frac{x-49}{\sqrt{x}-7} = \lim_{x \to 49} \frac{(\sqrt{x}-7)(\sqrt{x}+7)}{\sqrt{x}-7} = 14.$$

La sostituzione diretta delle funzioni a numeratore e a denominatore con i corrispondenti limiti per entrambe i precedenti rapporti porta ad attribuire la funzione alla forma indeterminata 0/0, mentre i limiti di entrambi i rapporti esistono effettivamente e sono uguali a 1 e 14 rispettivamente.

Per altri rapporti che appartengono alla stessa forma indeterminata il limite non esiste.

Osservazioni simili valgono per le altre forme indeterminate indicate in precedenza.

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Consideriamo la successione:

$$\frac{P_p(n)}{Q_q(n)} = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_p n^p + b_{p-1} n^{p-1} + ... + b_1 n + b_0}$$

quoziente di due polinomi di grado p e q. Vogliamo studiare il caso in cui si presenta una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Raccogliendo n^p al numeratore e n^q al denominatore si ha:

$$n^{p-q} \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} + ... + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_p + b_{p-1} n^{-1} + ... + b_1 n^{1-p} + b_0 n^{-p}}$$

cioè

$$n^{p-q} c_n$$

dove:

$$c_n = \frac{a_p + a_{p-1} n^{-1} + ... + a_1 n^{1-p} + a_0 n^{-p}}{b_p + b_{p-1} n^{-1} + ... + b_1 n^{1-p} + b_0 n^{-p}}$$

poiché $n^{-k} \to 0$ qualunque sia $k \in \mathbb{N}$ non nullo si ha:

$a_n = \dfrac{P_p(n)}{Q_q(n)}$ vale:

- $\dfrac{a_p}{b_q}$ se $p = q$
- $\text{segno}\left(\dfrac{a_p}{b_q}\right)\infty$ se $p > q$
- 0 se $p < q$

poiché n^{p-q} vale:

- 1 se $p = q$
- $+\infty$ se $p \geq q$
- 0 se $p \leq q$