

# Esponenziali e logaritmi

## Premessa

Questa breve trattazione non vuole costituire una guida completa ed esauriente sull'argomento, ma vuole fornire solamente i concetti fondamentali necessari per il raggiungimento degli obiettivi del programma di matematica applicata della classe quarta Igea.

## La teoria in sintesi

### ESPONENZIALI

#### Potenze con esponente reale

La potenza  $a^x$  è definita:

- se  $a > 0$ , per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ;
- se  $a = 0$ , per tutti e soli gli  $x \in \mathbf{R}^+$ ;
- se  $a < 0$ , per tutti e soli gli  $x \in \mathbf{Z}$ .

Sono definite:

$$\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\sqrt{3}\right);$$

$$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2};$$

$$3^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{3^{\sqrt{2}}}.$$

Non sono definite:

$$\left(-2^{\sqrt{5}}\right); 0^0; 0^{-3}.$$

Casi particolari :

- $a = 1$ ,  $1^x = 1$ , per ogni  $x \in \mathbf{R}$ ;
- $x = 0$ ,  $a^0 = 1$ , per ogni  $a \in \mathbf{R}^+$ ;

Le proprietà delle potenze definite per esponenti interi valgono anche per esponenti reali:

Se  $a > 0$ , per ogni  $x, y$  appartenenti a  $\mathbf{R}$  vale :

1.  $(a^x)^y = a^{xy}$  ;
2.  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$  ;
3.  $a^x : a^y = a^{x-y}$  ;
4.  $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$  ;
5.  $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$

### Funzione esponenziale

Si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo :

$$y = a^x \quad , \quad \text{con } a > 0 \text{ fissato, } x \in \mathbf{R}$$

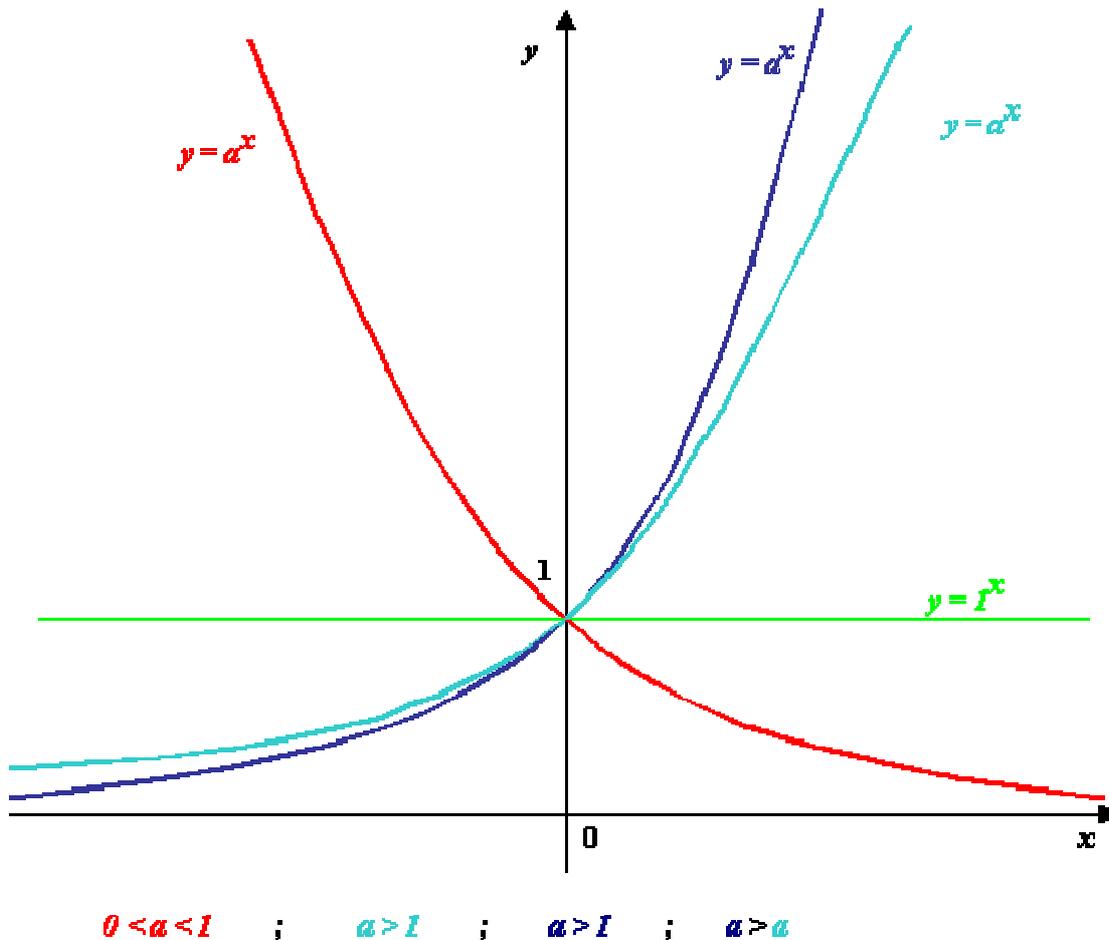
Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a  $x$  è tutto  $\mathbf{R}$  ;

il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è  $\mathbf{R}^+$  (la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva).

Si distinguono tre casi:

- $a > 1$  : funzione crescente :  $x > y \Rightarrow a^x > a^y$  ;
- $a = 1$  : funzione costante :  $a^x = 1$  per ogni  $x \in \mathbf{R}$  ;
- $0 < a < 1$  : funzione decrescente :  $x > y \Rightarrow a^x < a^y$  .

I seguenti grafici illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi :



## EQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMI

Un'equazione si dice *esponenziale* quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.

L'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo :

$$a^x = b, \text{ con } a > 0 \text{ e } b > 0 ; x \text{ è l'incognita dell'equazione.}$$

Un'equazione esponenziale del tipo  $a^x = b$  può essere *impossibile*, *indeterminata* o *determinata* :

- *impossibile* se  $b \leq 0$ , oppure  $b \neq 1$  e  $a = 1$  ; esempio :  $2^x = -3$  oppure  $1^x = 5$  ;
- *indeterminata* se  $a = 1$ ,  $b = 1$  ; esempio :  $1^x = 1$  ;
- *determinata* se  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$  ; esempio :  $3^x = 5$  .

Si chiama **logaritmo in base  $a$  di  $b$**  l'unica soluzione dell'equazione esponenziale elementare

$$a^x = b$$



*a = base dell'esponenziale  
e del logaritmo*

$$x = \log_a b$$

nel caso

determinato, cioè l'esponente  $x$  da assegnare alla base  $a$  per ottenere il numero  $b$ .

Supponiamo di dover risolvere un'equazione esponenziale  $a^x = b$  :

- se  $a$  e  $b$  si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, si eguagliano gli esponenti :

$$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3;$$

- se  $a$  e  $b$  non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono

$$\text{sotto forma di logaritmi : } 2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3.$$

Il logaritmo risulta essere l'operazione inversa dell'esponenziale, pertanto le limitazioni cui

è soggetto l'esponenziale si riflettono sul logaritmo: fissata la base  $a > 0$ , deve essere  $b > 0$ ,

inoltre valgono i casi particolari:  $\log_a 1 = 0$ , poichè  $a^0 = 1$ ;  $\log_a a = 1$ , poichè  $a^1 = a$ .

Analogamente, alle proprietà degli esponenziali precedentemente elencate corrispondono le seguenti proprietà dei logaritmi:

$$1) \log_a x^y = y \cdot \log_a x \quad (x \in \mathbf{R}^+ ; y \in \mathbf{R}, a > 0);$$

$$2) \log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y \quad (x \in \mathbf{R}^+ ; y \in \mathbf{R}^+, a > 0);$$

$$3) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (x \in \mathbf{R}^+ ; y \in \mathbf{R}^+, a > 0);$$

$$4) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (a, b, c > 0); \text{ formula di cambiamento di base nei logaritmi .}$$

I logaritmi che compaiono sulle calcolatrici sono in base  $a = 10$  oppure in base  $a = e \approx 2,718$  :

$\log x$  indica il  $\log_{10} x$ , detto anche *logaritmo decimale*;  $\ln x$ , indica il  $\log_e x$ , detto anche *logaritmo naturale* o *neperiano*.

## Funzione logaritmica

Si chiama *funzione logaritmica* ogni funzione del tipo :

$$y = \log_a x, \text{ con } a > 0 \text{ e } a \neq 1 \text{ fissato, } x \in \mathbf{R}^+.$$

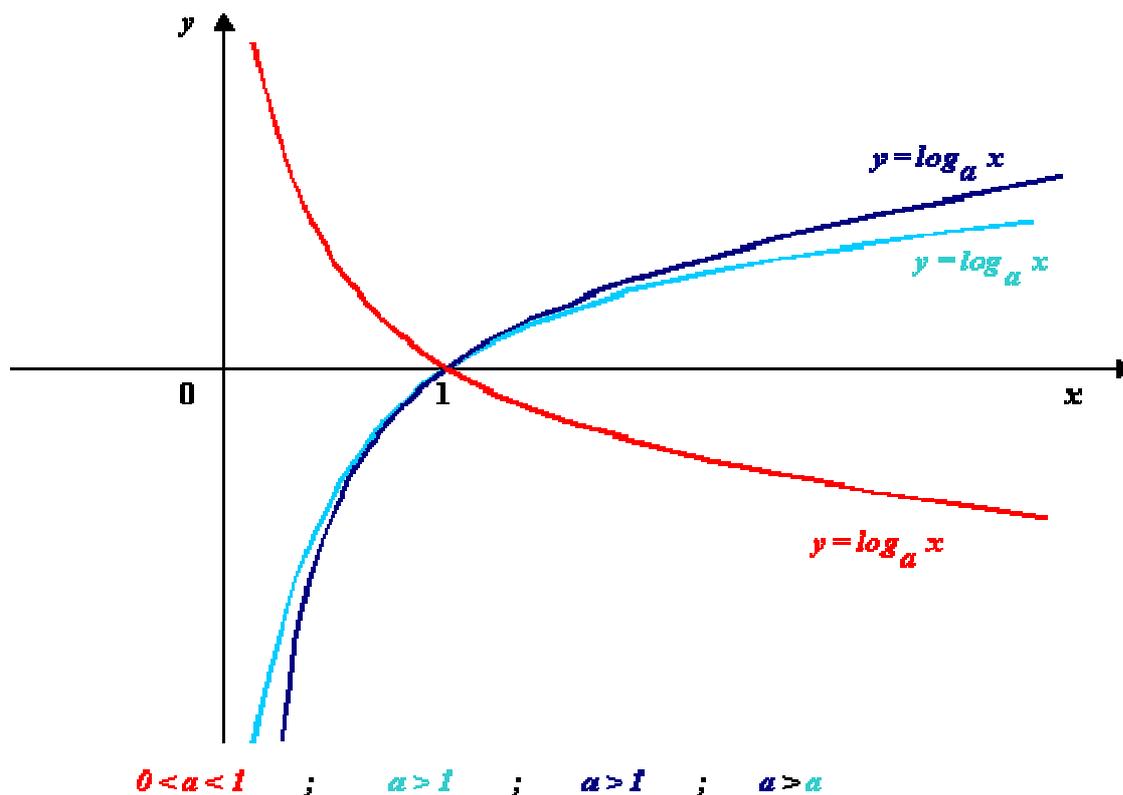
La funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, pertanto *dominio* e *codominio* risultano scambiati rispetto a quelli della funzione esponenziale.

Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a  $x$  è  $\mathbf{R}^+$  ;  
 il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è  $\mathbf{R}$  .

Si distinguono due casi:

- $a > 1$  : funzione crescente :  $x > y \Rightarrow \log_a x > \log_a y$  ;
- $0 < a < 1$  : funzione decrescente :  $x > y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$  ;

I grafici della funzione logaritmica si ottengono da quelli della funzione esponenziale



per

simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ( $y = x$ ) ; essi illustrano il comportamento della funzione esponenziale nei vari casi :

## EQUAZIONI LOGARITMICHE

Un'equazione si dice *logaritmica* quando l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.

L'equazione logaritmica più semplice (elementare) è del tipo :

$$\log_a x = b \text{ , con } a > 0 \text{ e } b \in \mathbf{R} \text{ ; } x > 0 \text{ è l'incognita dell'equazione .}$$

La sua soluzione, per quanto detto a proposito dell'equazione esponenziale, è :  $x = a^b$  .

Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:

1. (quando è possibile) trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo  $\log_a A(x) = \log_a B(x)$ , applicando le proprietà dei logaritmi ;
2. determinare le soluzioni dell'equazione  $A(x) = B(x)$  ;
3. eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di  $x$  calcolati al punto 2 ;
4. in alternativa al punto 3, associare all'equazione di cui al punto 2 tutte le condizioni di esistenza sui logaritmi (ricordiamo che un logaritmo è definito soltanto per valori positivi del suo argomento), per selezionare le soluzioni accettabili.

### Esempi

1. Risolviamo l'equazione:

$$8 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} = 16.$$

Osserviamo che:

$$2^{x+1} = 2^x \cdot 2 \quad \text{e} \quad 2^{x-1} = \frac{2^x}{2}.$$

Quindi è possibile trasformare l'equazione assegnata nell'equazione:

$$8 \cdot \frac{2^x}{2} - 2 \cdot 2^x = 16 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3$$

La soluzione dell'equazione data è quindi  $x = 3$ .

2. Risolviamo l'equazione:

$$5 \cdot 3^x = 7.$$

Possiamo trasformare l'equazione eseguendo il logaritmo (in una base qualsiasi, per esempio in base 10) del primo e del secondo membro:

$$\log(5 \cdot 3^x) = \log 7.$$

Applichiamo la proprietà 2) dei logaritmi:

$$\log 5 + \log 3^x = \log 7.$$

Applichiamo la proprietà 1) dei logaritmi:

$$\log 5 + x \cdot \log 3 = \log 7.$$

Isolando  $x$  otteniamo:

$$x = \frac{\log 7 - \log 5}{\log 3} \quad (*).$$

In alternativa potevamo isolare  $3^x$ , ottenendo:

$$3^x = \frac{7}{5}.$$

Prendendo il logaritmo in base 3 di entrambi i membri si ha:

$$x = \log_3 \frac{7}{5} = \log_3 7 - \log_3 5$$

Utilizzando la formula di cambiamento di base 4) si riottiene (\*).

3. Risolviamo l'equazione:

$$2^x + 2^{3-x} = 6.$$

Osserviamo che:

$$2^{3-x} = \frac{2^3}{2^x}.$$

L'equazione assegnata è equivalente a:

$$2^x + \frac{8}{2^x} = 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{2^x \cdot 2^x + 8}{2^x} = \frac{6 \cdot 2^x}{2^x}$$

Il denominatore, essendo una funzione esponenziale, non può assumere il valore zero. Possiamo

moltiplicare per  $2^x$  entrambi i membri, ottenendo:

$$(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0.$$

E' evidente la struttura di equazione algebrica di II grado nell'incognita  $2^x$ .

Risolvendo tale equazione (può essere utile introdurre una variabile ausiliaria  $z = 2^x$  per rendere

più evidente la natura di equazione di secondo grado) si ha:

$$2^x = 2 \quad \text{oppure} \quad 2^x = 4$$

da cui:

$$x = 1 \quad \text{oppure} \quad x = 2.$$

4. Risolviamo l'equazione logaritmica:

$$\log_3(x+1) - \log_3(x-2) = \log_3 x - 2.$$

Imponiamo le condizioni di esistenza sui logaritmi dell'equazione data, ricordando che

gli argomenti devono essere positivi:

$$\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 2 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

cioè alla variabile  $x$  si possono assegnare solo i valori maggiori di 2.

Risolviamo l'equazione applicando la proprietà 3) dei logaritmi e osservando che  $2 = \log_3 3^2$ :

$$\log_3\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \log_3\left(\frac{x}{3^2}\right)$$

Uguagliando gli argomenti si ha la seguente equazione equivalente:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x}{9} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 11x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{157}}{2}.$$

Il valore  $x = \frac{11 - \sqrt{157}}{2}$  è minore di 2, quindi non è compatibile con le condizioni di esistenza. L'unica soluzione dell'equazione è data da:

$$x = \frac{11 + \sqrt{157}}{2}$$

## Esercizi

1. Tenendo presente che  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ , scrivi le seguenti potenze sotto forma di radice:

a)  $3^{\frac{5}{8}}$ ;  $4^{\frac{2}{3}}$ ;  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$ ;

b)  $2^{-\frac{4}{3}}$ ;  $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$ ;  $\left(\frac{11}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$ .

2. Scrivi le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale:

a) a)  $\sqrt[6]{2^5}$ ;  $\sqrt[4]{243}$ ;  $\sqrt[4]{0.25}$ ;

b) b)  $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ;  $\sqrt[19]{\frac{1}{256}}$ ;  $\sqrt[7]{\frac{1}{125}}$ .

3. Risolvi le seguenti equazioni esponenziali:

a)  $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$   $\left[\frac{9}{2}\right]$

b)  $8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$   $\left[-\frac{1}{2}\right]$

c)  $a^x \cdot a^{2x-1} = \frac{a^2}{\sqrt{a}}$   $\left[\frac{5}{6}\right]$

d)  $2^x + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 7$   $\left[\log_2 \frac{14}{5}\right]$

e)  $4^x = 2^x - 2$   $[\emptyset]$

f)  $3 \cdot 5^x = 7$   $\left[\log_5 \frac{7}{3} = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 5}\right]$

g)  $3^x + 3^{1-x} = 4$   $[0; 1]$

h)  $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = 3^{x-1}$   $[-1; 2]$

i)  $6 \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$   $\left[-1; -\frac{\log 3}{\log 2}\right]$

j)  $2^{2x+3} - 25 \cdot 2^x + 3 = 0$   $[-3; \log_2 3]$

4. Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

a)  $\log_2(x-1) = 3$   $[9]$

b)  $\log(x-2) + \log 5 = \log x$   $\left[\frac{5}{2}\right]$

c)  $\log(x-2) - \log(x-1) = \log 5$   $[\emptyset]$

d)  $2 \cdot \log_2 x = 2 + \log_2(x+3)$

[6]

e)  $\log(x-1) - 2 \cdot \log(x+1) - \log 8 = -2$

$\left[\frac{3}{2}; 9\right]$

f)  $\log_3(x-1) = \frac{1}{2} \log_3 x$

$\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$