Breve trattazione sui RADICALI

L'estrazione di **radice non è un'operazione interna in Q**

La necessità di ampliare l'insieme Q

La sottrazione, operazione inversa dell'addizione, è diventata operazione interna introducendo i numeri interi (insieme Z). Analogamente con i razionali (insieme Q), è stato possibile rendere interna la divisione, operazione inversa della moltiplicazione. Vedremo ora che **l'operazione inversa della potenza, l'estrazione di radice, non è operazione interna ai razionali**, non esiste nessun razionale infatti che, elevato al quadrato, dia, per esempio, come risultato il numero 2. Questo induce ad un **ampliamento dell'insieme Q.**
Se, per semplicità e per il momento, ci limitiamo a considerare solo l'operazione inversa dell'elevamento al quadrato, cioè la radice quadrata, possiamo dire che:

- -3 non è la radice quadrata di 9. Infatti, pur essendo un numero che elevato al quadrato dà 9, -3 non rispetta la definizione perché non è positivo o nullo.

DEFINIZIONE: La **radice quadrata** di un numero razionale **positivo o nullo è** quel numero, positivo o nullo, che elevato al quadrato, dà come risultato il numero dato.

La radice quadrata si indica con il simbolo $\sqrt{\ }$

Numeri razionali e retta

Nella rappresentazione dei razionali su una retta, ad ogni razionale corrisponde un punto. Esistono punti della retta che non corrispondono a razionali? Si. Vediamo qualche esempio. Costruiamo su un segmento unitario un quadrato e con un compasso riportiamo la diagonale sulla retta. Il segmento così ottenuto, cioè la diagonale, misura proprio $\sqrt{2}$ che non è un razionale, come verificheremo in seguito.

Dai razionali ai reali

Le successioni approssimanti

Se consideriamo la frazione $\frac{5}{6}$ ci accorgiamo che questa corrisponde al numero periodico $0,8\overline{3}$ che può essere approssimato, per difetto o per eccesso, al numero di cifre decimali che si vuole.
Le approssimazioni per difetto sono: 0 0,8 0,83 0,833 0,8333 0,83333 …..
Le approssimazioni per eccesso sono: 1 0,9 0,84 0,834 0,8334 0,83334 …..
Più aumentano le cifre decimali più ci si avvicina al valore cercato.

Cerchiamo ora due successioni di numeri decimali tali che, i loro quadrati, approssimino il numero 2. In una prima analisi possiamo dire che $(1)^2 < 2 < (2)^2$ e poi che $(1,4)^2 < 2 < (1,5)^2$ e ancora $(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2$ e così via. I termini della prima successione sono crescenti, quelli della seconda decrescenti e la differenza tra un termine della seconda e il corrispondente della prima va via via diminuendo, tuttavia non si giunge mai ad uno stesso decimale finito o periodico. Il numero $\sqrt{2}$, pur avendo infinite cifre decimali, non è periodico. Diamo allora la seguente definizione:
DEFINIZIONE:
Chiamiamo numero **irrazionale** ogni numero **decimale illimitato non periodico**.

Esistono irrazionali che non derivano da estrazione di radice: per esempio π, che rappresenta il rapporto fra la misura di una circonferenza e il suo diametro.

I REALI

Per ampliare l'insieme dei razionali, consideriamo un nuovo insieme, quello dei reali, che è l'unione dell'insieme dei razionali con quello degli irrazionali.
DEFINIZIONE: Chiamiamo numero **reale** ogni numero **razionale o irrazionale.**

Indichiamo con **R** l'insieme dei reali .

Nei numeri **reali non negativi** l'estrazione di **radice è interna**.

I RADICALI IN R_0^+

Chiediamoci ora anche se, considerata la funzione potenza (per semplicità fissiamo l'attenzione su $y = x^2$), la relazione inversa[1] è ancora una funzione, cioè se, dato un numero reale y, esiste uno ed un solo numero reale x tale che $x^2 = y$.

In generale possiamo dire che, data $y = x^n$, si possono verificare le seguenti situazioni:

- se **n è pari**, y è positivo e ad esso corrispondono due valori opposti di x; quindi **la funzione non è invertibile.**
- Se **n è dispari** ad ogni x corrisponde uno e un solo y, positivo quando x è positivo, negativo quando x è negativo; la corrispondenza in questo caso è biunivoca e quindi **la funzione è invertibile.**

Ma se ci limitiamo a considerare l'insieme dei reali non negativi, allora la funzione $y = x^n$ è sempre biunivoca e quindi invertibile, da cui possiamo enunciare la seguente:

Casi particolari:
Per $\forall$ *n naturale diverso da zero* ed *a reale non negativo*, valgono le seguenti proprietà:

$\sqrt[1]{a} = a$

$\sqrt[n]{0} = 0$

$\sqrt[n]{1} = 1$

$(\sqrt[n]{a})^n = a$

<u>DEFINIZIONE</u>: Dato un numero *naturale* ***n*** *diverso da zero* e un *reale* ***a*** , *positivo o nullo*, la **radice *n*-esima di *a*** è quel reale ***b*,** *positivo o nullo*, la cui ***potenza con esponente n* è uguale ad *a*.**

Radicale

indice $\sqrt[4]{3^5}$ Esponente del radicando

Radicando

La proprietà invariantiva

Teorema: Il valore di un radicale non cambia se si moltiplicano il suo indice e l'esponente del suo radicando per uno stesso intero positivo.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \quad con \quad n, m, p \text{ naturali} > 0 \quad e \quad a \text{ reale} \geq 0$$

La semplificazione dei radicali

Per la proprietà simmetrica dell'uguaglianza possiamo leggere la proprietà invariantiva anche così: $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m} \quad con \quad p > 0\, e \quad a \geq 0$. Dato cioè un radicale si ottiene un **radicale equivalente** a quello dato ***dividendo* l'indice della radice e l'esponente del radicando** per un loro **divisore comune**. In questo caso si dice che il radicale è stato **semplificato**.
Per contro si dice **irriducibile** un **radicale** che ha l'indice e l'esponente del radicando **primi fra loro**.

La semplificazione e il valore assoluto

Per semplificare il radicale $\sqrt[8]{(-5)^{12}}$ **non** possiamo scrivere $\sqrt[8]{(-5)^{12}} = \sqrt[2\cdot 4]{(-5)^{4\cdot 3}} = \sqrt{(-5)^3}$ perché $(-5)^3$ è negativo e non esiste nessun reale che elevato al quadrato dia come risultato un numero negativo. Per questo dobbiamo considerare -5 in **valore assoluto:** $\sqrt[2\cdot 4]{(-5)^{4\cdot 3}} = \sqrt[2\cdot 4]{|-5|^{4\cdot 3}} = \sqrt{|-5|^3} = \sqrt{5^3}$.

Consideriamo il seguente esempio: $\sqrt{(a-1)^2}$ poiché non ci sono limitazioni su *a*, la garanzia che il radicando rimanga sempre positivo mi viene data dal fatto che l'esponente del radicando è pari. Quando semplifichiamo però, l'esponente viene a mancare e sul binomio $(a-1)$ non abbiamo più nessuna certezza che resti sempre positivo. Quindi, al fine di garantire la positività mettiamo il valore assoluto: $\sqrt{(a-1)^2} = |a-1|$. Vale quindi, per ogni x: $\sqrt{x^2} = |x|$

[1] Partendo dall'equazione y = x ^{n} ,sappiamo che questa è la funzione potenza. Inversamente, nota la potenza y è possibile determinare la base x nel caso si conosca l'esponente n e questa e l'operazione inversa che prende il nome di estrazione di radice. Ma, nota la potenza y è possibile determinare l'esponente n nel caso si conosca la base x e questa operazione prende il nome di logaritmo. Quindi all'operazione di elevamento di potenza corrispondono due operazioni inverse.

La riduzione dei radicali allo stesso indice	Applicando la proprietà invariantiva si può fare in modo che più radicali siano trasformati in altri equivalenti che abbiamo tutti lo stesso indice. In particolare si può ridurli a radicali che abbiano il **minimo indice comune**. I passaggi necessari sono: 1. Cercare il m.c.m fra gli indici 2. Trasformare ogni radicale in uno equivalente, che ha per indice il m.c.m. trovato. Es: $\sqrt[5]{2a^2};\sqrt[4]{a^3}$ m.c.m.$(5,4)=20$ $\sqrt[20]{16a^8};\sqrt[20]{a^{15}}$ Con questo metodo si possono confrontare anche due radicali: prima portandoli allo stesso indice comune e poi confrontando i radicandi.
La moltiplicazione tra radicali	<u>Teorema</u>: Il **prodotto di due radicali** con lo stesso indice **è un radicale** che ha per indice lo stesso indice e **per radicando il prodotto dei radicandi** $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ con a e b reali, $a \geq 0$, $b \geq 0$ e n naturale, $n \neq 0$
Trasporto di un fattore fuori dal simbolo di radice	Per la **proprietà simmetrica** dell'uguaglianza il teorema precedente può essere scritto: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ che significa che **la radice di un prodotto** è uguale **al prodotto delle radici**. In altre parole cioè un radicale il cui radicando è scomponibile **in fattori non negativi** è uguale al prodotto di più radicali con lo stesso indice che hanno per radicandi i fattori che componevano il radicando di partenza. **Questa proprietà permette di trasportare fuori dal segno di radice** i fattori del radicando che hanno come esponente un multiplo dell'indice della radice. In generale: $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{n\cdot q+r}}=\sqrt[n]{a^{n\cdot q}\cdot a^r}=a^q\sqrt[n]{a^r}$ Quando si vuol portare fuori dal segno di radice un fattore ma non si conosce il segno, si scrive tale fattore in valore assoluto: $\sqrt{2(a-b)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(a-b)^2}=\|a-b\|\sqrt{2}$.
La divisione tra radicali	<u>Teorema</u>: Il **quoziente di due radicali** (il secondo *diverso da 0*) con lo stesso indice **è un radicale** che ha per indice lo stesso indice e **per radicando il quoziente dei radicandi** $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a:b}$ con a e b reali, $a \geq 0$, $b > 0$ e n naturale, $n \neq 0$.
La potenza di un radicale	<u>Teorema</u>: La **potenza** *m*-esima di un **radicale è un radicale** che ha per indice lo stesso indice e **per radicando la potenza *m*-esima del radicando,** ossia: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ con a reale, $a \geq 0$, n e m naturali, $n \neq 0$ e $m \neq 0$.
La radice di un radicale	<u>Teorema</u>: La **radice** *m*-esima di un **radicale** di indice *n* **è un radicale** che ha per indice il prodotto degli indici e **per radicando lo stesso radicando,** ossia: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$ con a reale, $a \geq 0$, n e m naturali, $n \neq 0$ e $m \neq 0$.
Il trasporto di un fattore dentro al segno di radice	Dato il radicale $3\cdot\sqrt[4]{5}$ è possibile portare il fattore 3 sotto il segno di radice tenendo presente che $3=\sqrt[4]{3^4}$ possiamo scrivere: $3\cdot\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{3^4\cdot 5}$ In generale, se $a \geq 0$ $a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n\cdot b}$ Osservazione. I fattori negativi nel trasporto lasciano il segno fuori radice e viene portato dentro solo il valore assoluto. $-3\sqrt{5}=-\sqrt{45}$. Quindi considerando l'espressione: $x\sqrt{a}$ viene spontaneo scrivere $x\sqrt{a}=\sqrt{x^2a}$, ma questo è vero solo per x ≥0. L'uguaglianza non è vera per x < 0 , come risulta evidente dal fatto che il primo membro è negativo e il secondo positivo. Vale in definitiva la seguente espressione: $x\sqrt{a}=\begin{cases}\sqrt{x^2a} & \text{se x} \geq 0\\ -\sqrt{x^2a} & \text{se x} < 0\end{cases}$ In altre parole, se si deve "portare dentro" una radice di indice pari un fattore esterno che può essere sia positivo che negativo, occorre distinguere due casi: ▪ se il fattore è positivo lo si "porta dentro" senza problemi elevandolo all'indice della radice ▪ se il fattore è negativo si procede allo stesso modo "lasciando" però il segno "–" fuori dalla radice.

L'addizione e la sottrazione di radicali

Non sempre è possibile semplificare espressioni che contengono somme di radicali. In generale quindi: $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$, però date le espressioni $2\sqrt{3}$ *e* $5\sqrt{3}$ si può eseguire l'addizione o la sottrazione: $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=7\sqrt{3}$ o $2\sqrt{3}-5\sqrt{3}=-3\sqrt{3}$.

DEFINIZIONE: **Due radicali** irriducibili **si dicono simili** quando hanno lo stesso indice, lo stesso radicando e possono essere diversi solo per il fattore che li moltiplica, detto coefficiente del radicale.

Razionalizzazione

LA RAZIONALIZZAZIONE DEL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE

Razionalizzare un denominatore significa trasformare una frazione in una equivalente che non ha radicali al denominatore (utile per sommare tra loro frazioni).
Per razionalizzare il denominatore si applica la proprietà invariantiva delle frazioni, moltiplicando numeratore e denominatore per uno stesso fattore diverso da zero.
Casi più comuni:

1. Il denominatore è un radicale unico $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$

2. Il denominatore è la somma o la differenza di due termini dei quali almeno uno è un radicale quadratico:
   es: $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}=2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

3. Il denominatore è la somma o la differenza di radicali cubici: es: $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}=\dfrac{2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3})(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}=\dfrac{2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})}{2-3}=-2(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9})$

Radicali quadratici doppi

Si chiama radicale doppio un'espressione del tipo: $\sqrt{a+\sqrt{b}}$
Un radicale doppio può essere trasformato nella somma o differenza di due radicali semplici solo quando l'espressione a^2-b è il quadrato di un numero razionale o di una espressione che non contiene radicali. In tal caso valgono le seguenti uguaglianze:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

e

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Trasformiamo il radicale doppio: $\sqrt{8-\sqrt{15}}$ Ciò è possibile perché $8^2-15=49=7^2$.

$$\sqrt{8-\sqrt{15}}=\sqrt{\frac{8+\sqrt{49}}{2}}-\sqrt{\frac{8-\sqrt{49}}{2}}=\sqrt{\frac{15}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{15}-1}{\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{15}-1)\sqrt{2}}{2}$$